УТОЧНЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

Мельничук Д. В., СГУ, аспирант

Андрейченко Д.К., СГУ, профессор каф. МОВКИС

Андрейченко К.П., СГТУ, профессор каф. ПМиСА

Саратов 2018

Ранее показано:

Сферический гидродинамический подвес асимптотически устойчив в центральном положении (метод осреднения профиля скорости жидкости в поддерживающем слое).

Целью работы является:

- Привлечение методов теории комбинированных динамических систем для более точного исследования границ области устойчивости
- Учет угловых вибраций корпуса прибора
- Учет аксиальной жесткости подвеса
- Учет разности главных центральных моментов инерции ротора
- Учет сжимаемости жидкости поддерживающего слоя

Комбинированная динамическая модель сферического гидродинамического подвеса

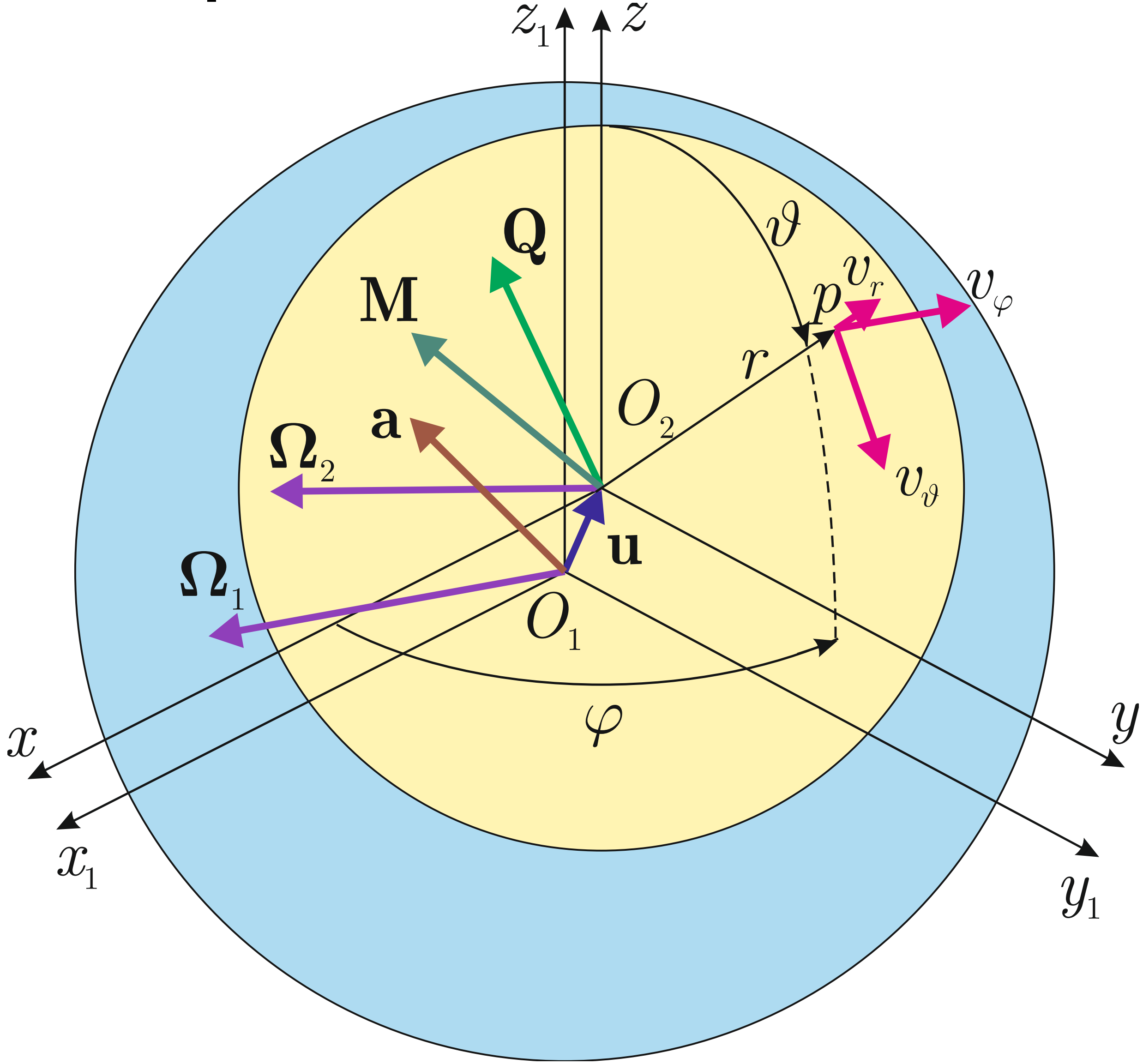

Рис. 1. Расчетная схема

Поворот Декартовой системы координат $Ox_\alpha y_\alpha z_\alpha$ отн. $Ox_0 y_0 z_0$

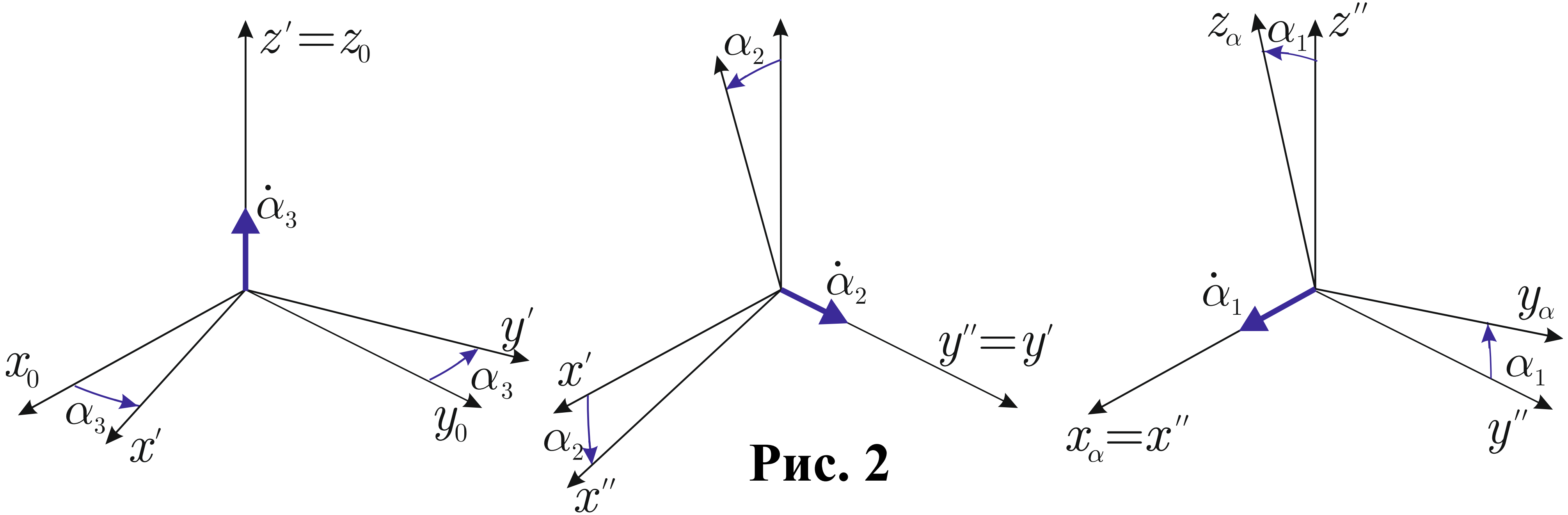

Рис. 2

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T, \ (x_0, y_0, z_0)^T = A(\boldsymbol{\alpha})(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)^T$$

$$A(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 \end{bmatrix}, B_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}) = A(\boldsymbol{\alpha})(1,0,0)^T, \ \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(1)}) = \mu_1^{-1}[\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}^{(1)}) - \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)})]$$

Уравнения движения ротора (внутренней сферы) – ОДУ

$$\beta \frac{\rho_2}{\rho}\ddot{\mathbf{u}} = \gamma\left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1\right)(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) - \mu_1 \gamma \frac{\rho_2}{\rho}\mathbf{a}_1 + \frac{3}{4\pi}\mathbf{Q} -$$
$$-((k_{1a}\dot{\mathbf{u}} + k_{2a}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}), \;\; \dot{()} = d()\,/\,dt$$
$$\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} = \omega_1^{(0)}\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}), \;\; \boldsymbol{\Omega}_2 = (\omega_2, 0, 0)^T + \boldsymbol{\omega}^{(r)}$$
$$\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} = B_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)})\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)} +$$
$$+\omega_1^{(1)}\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}) + \omega_1^{(0)}\mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)})$$
$$\boldsymbol{\omega}^{(r)} = B(\boldsymbol{\alpha}_2)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \mu_1 A^T(\boldsymbol{\alpha}_2) B_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)})\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)}$$
$$\frac{\rho_2}{\rho}(J\dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}^{(r)} \times J\boldsymbol{\Omega}_2) = \frac{3}{4\pi}\frac{\beta}{\sigma}A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)})\mathbf{M} \qquad (2)$$
$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_2), \;\; J_1 > J_2, \;\; |\mathbf{g}| = 1$$

t – время

$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ – смещение ротора относительно центра внешней сферической камеры;

$\boldsymbol{\Omega}_2 = (\Omega_{2_{xr}}, \Omega_{2_{yr}}, \Omega_{2_{zr}})^T$ – абсолютная угловая скорость ротора в проекциях на оси связанной с ротором резалевой системы координат;

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, \alpha_{2_2}, \alpha_{2_3})^T$ – углы поворота резалевой системы координат относительно корпуса прибора;

ω_2 – угловая скорость собственного вращения ротора;

$\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)^T$, $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ – сила и момент сил, действующих на ротор со стороны поддерживающего слоя;

$\boldsymbol{\Omega}_1^{(j)} = (\Omega_{1_x}^{(j)}, \Omega_{1_y}^{(j)}, \Omega_{1_z}^{(j)})^T$, $\boldsymbol{\alpha}_1^{(j)} = (\alpha_{1_1}^{(j)}, \alpha_{1_2}^{(j)}, \alpha_{1_3}^{(j)})^T$, $\omega_1^{(j)}$, $\mathbf{a}_j = (a_{j_x}, a_{j_y}, a_{j_z})^T$, $j = 0{,}1$ – постоянные и переменные во времени составляющие абсолютной угловой скорости вращения внешней сферической камеры, углов поворота корпуса прибора относительно инерциальной системы координат, угловой скорости вращения внешней сферической камеры относительно корпуса прибора, абсолютного ускорения корпуса прибора соответственно;

ρ – плотность жидкости в поддерживающем слое;

ρ_2 –приведенная плотность ротора;

J_1, J_2 – безразмерные главные центральные моменты инерции ротора;
k_{1a}, k_{2a} – коэффициенты демпфирования и жесткости аксиального центрирующего устройства;

γ, μ_1 – параметры нагруженности и нелинейности.

Уравнения динамики поддерживающего слоя – УЧП

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{c_{ac}^2}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + ((\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}) \times \mathbf{r}) \cdot (\mu_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1^{(1)} \times \mathbf{r})\right] + \nabla \cdot \Big[\ 1 + c_{ac}^{-2}\mathcal{P}\ \ \mathbf{v} + \\
+ c_{ac}^{-2}(p + \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}) \times \mathbf{r}\Big] = 0 \\
\mathbf{v} = \beta v_r \mathbf{e}_r + v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{r} = (1 + \beta\xi)\mathbf{e}_r \\
\mathcal{P} = p + \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{r} + [(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}) \times \mathbf{r}]^2 / 2 \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1^{(1)} \times \mathbf{r} + \nabla\left[(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}) \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right] + \\
+ 2(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}) \times \mathbf{v} - [(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}) \times \mathbf{r} + \mathbf{v}] \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \\
= -\nabla p - (\mu_1 \gamma \mathbf{a}_1 + \beta \ddot{\mathbf{u}}) + \frac{\beta^2}{\sigma_1}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{\beta^2}{\sigma}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{\mathcal{P}\nabla\mathcal{P}}{c_{ac}^2 + \mathcal{P}} \qquad (3)
\end{gathered}
$$

Граничные условия

$$\mathbf{v}\big|_{\xi=0} = -\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_r; \quad \mathbf{v}\big|_{\xi=h} = -\beta[\dot{\mathbf{u}} - (\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{u}] \tag{4}$$

$$h = [[(1+\beta)^2 + \beta^2((\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{u}^2)]^{1/2} - 1]/\beta - \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (\omega_1^{(0)} + \mu_1\omega_1^{(1)})\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}) - A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)})[B_1(\boldsymbol{\alpha}_2)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \omega_2\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2)]$$

Условия связи

$$\mathbf{Q} = \int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\left(-p\big|_{\xi=0} + \frac{\beta^2}{\sigma_1}\frac{\partial v_r}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\right)\mathbf{e}_r + \frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi\right)\right]$$

$$\mathbf{M} = \frac{8\pi}{3}\beta\boldsymbol{\Omega} + \int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\vartheta\right) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)^T,\\ &\mathbf{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)^T, \ \ \mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T\end{aligned} \tag{6}$$

В качестве начальных условий задаются

$$\mathbf{u}\big|_{t=0},\ \dot{\mathbf{u}}\big|_{t=0},\ \omega_2\big|_{t=0},\ \alpha_{2_2}\big|_{t=0},\ \dot{\alpha}_{2_2}\big|_{t=0},\ \alpha_{2_3}\big|_{t=0},\ \dot{\alpha}_{2_3}\big|_{t=0},\ \mathbf{v}\big|_{t=0},\ p\big|_{t=0} \tag{7}$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор в системе координат $Oxyz$;

$(\xi, \vartheta, \varphi)$ – связанная с $Oxyz$ сферическая система координат;

h – толщина поддерживающего слоя;

p, $\mathbf{v}$ – редуцированное давление и относительная скорость;

–жидкости в поддерживающем слое;

σ, σ_1 – колебательное число Рейнольдса и его аналог для скорости объемной деформации;

$c_{ac} \gg 1$ – безразмерная скорость звука

Входная и выходная вектор-функции

Входная вектор-функция: $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{a}_1(t), \omega_1^{(1)}(t), \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(t)\}$ (8)

Выходная вектор-функция: $\mathbf{y}(t) = \{\mathbf{u}(t), \omega_2(t), \boldsymbol{\alpha}_2(t)\}$ (9)

Скорость распространения возмущений давления в жидкости

- При $\sigma = \sigma_1 = \infty$ и $c_{ac} \gg 1$ в пространстве с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ конечные скачки давления p распространяются относительно потока со скоростью $\pm c_{ac} + O(1 / c_{ac})$.

- При $\sigma = \sigma_1 = \infty$ слабые разрывы давления p распространяются относительно потока со скоростью $\pm c_{ac}$.

Операции векторного анализа в (3)

$$f = f(\xi, \vartheta, \varphi), \;\; \mathbf{F} = F_r(\xi, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_r + F_\vartheta(\xi, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\vartheta + F_\varphi(\xi, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{1}{\beta}\frac{\partial f}{\partial \xi}\mathbf{e}_r + \frac{1}{1+\beta\xi}\nabla^{(s)} f, \;\; \nabla^{(s)} f = \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{(1+\beta\xi)^2}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\beta\xi)^2 F_r\right] + \frac{1}{1+\beta\xi}\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F}$$

$$\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(F_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{1+\beta\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}((1+\beta\xi)\mathbf{e}_r \times \mathbf{F}) + \nabla^{(s)} \times \mathbf{F}\right]$$

$$\nabla^{(s)} \times \mathbf{F} = -\mathbf{e}_r \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{F}) - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} F \qquad (10)$$

Равновесное состояние

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}^{(0)},\ h=h_0\ ,\ \mathbf{v}=\mathbf{v}^{(0)},\ p=p^{(0)},\ \mathcal{P}=\mathcal{P}^{(0)} \qquad (11)$$

– решение системы уравнений

$$\gamma(\rho_2/\rho-1)(\mathbf{g}-\mathbf{a}_0)+\tfrac{3}{4}\mathbf{Q}/\pi-k_{2a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\ \ \mathbf{M}=0$$

$$h=[[(1+\beta)^2+\beta^2((\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r)^2-\mathbf{u}^2)]^{1/2}-1]/\beta-\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r,\ \ \mathbf{r}=(1+\beta\xi)\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v}=\beta v_r\mathbf{e}_r+v_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi,\ \ \mathcal{P}=p+\gamma(\mathbf{g}-\mathbf{a}_0)\cdot\mathbf{r}+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r})^2$$

$$\nabla\cdot[(1+c_{ac}^{-2}\mathcal{P})\mathbf{v}+c_{ac}^{-2}(p+\gamma(\mathbf{g}-\mathbf{a}_0)\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r}]=0 \qquad (12)$$

$$\nabla[\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\mathbf{v}^2]+2\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{v}-(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r}+\mathbf{v})\times(\nabla\times\mathbf{v})=-\nabla p+$$

$$+\beta^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})/\sigma_1-\beta^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})/\sigma+(c_{ac}^2+\mathcal{P})^{-1}\mathcal{P}\nabla\mathcal{P}$$

$$\mathbf{v}\big|_{\xi=0}=-\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_r;\quad \mathbf{v}\big|_{\xi=h}=\beta\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{u}$$

$$\mathbf{Q}=\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\left(-p\big|_{\xi=0}+\frac{\beta^2}{\sigma_1}\frac{\partial v_r}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\right)\mathbf{e}_r+\frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\vartheta+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi\right)\right]$$

$$\mathbf{M}=\frac{8\pi}{3}\beta\boldsymbol{\Omega}+\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi-\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\vartheta\right)$$

Возмущенное движение (13)

$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mu_1\mathbf{u}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)},\ \omega_2=\omega_2^{(0)}+\mu_1\omega_2^{(1)},\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$

$h=h_0+\mu_1 h_1, p=p^{(0)}+\mu_1 p^{(1)}, \mathbf{v}=\mathbf{v}^{(0)}+\mu_1\mathbf{v}^{(1)}, \mu_1\to 0, \tilde{f}(\lambda)=\int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt$

(2)-(7), (12),(13) $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$, $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$, h_1, $p^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$ – решение лин. ур-ий

$$\beta\rho_2\lambda^2\mathbf{u}/\rho=-\gamma\rho_2\mathbf{a}_1/\rho+\tfrac{3}{4}\mathbf{Q}/\pi-(k_{1a}\lambda+k_{2a})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})-$$
$$-k_{2a}[[\mathbf{u}_0\cdot(\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}]\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})+(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))(\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}]$$
$$\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}=\omega_1^{(1)}\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})+(B_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})\lambda+\omega_1^{(0)}\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}$$
$$\boldsymbol{\Omega}=\omega_1^{(1)}\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})-A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})[\omega_2\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})+(B_1(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\lambda+\omega_2^{(0)}\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})/\partial\boldsymbol{\alpha}))\boldsymbol{\alpha}_2]+$$
$$+\omega_1^{(0)}(\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}-\omega_2^{(0)}\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_{1_j}^{(1)}\partial A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial\alpha_j\right]\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) \qquad (14)$$
$$\boldsymbol{\Omega}_2=(\omega_2,0,0)^T+\boldsymbol{\omega}^{(r)},\ \boldsymbol{\omega}^{(r)}=\lambda(B(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\boldsymbol{\alpha}_2+A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)B_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)})$$
$$\rho_2(J\lambda\boldsymbol{\Omega}_2+\boldsymbol{\omega}^{(r)}\times(J_1\omega_2^{(0)},0,0)^T)/\rho=\tfrac{3}{4}\beta A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})\mathbf{M}/(\pi\sigma)$$

$$\mathbf{Q}(\lambda)=Q^{(a)}(\lambda)\gamma\mathbf{a}_1+Q^{(\Omega,1)}(\lambda)\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}+Q^{(u)}(\lambda)\mathbf{u}+Q^{(\Omega)}(\lambda)\boldsymbol{\Omega}$$
$$\mathbf{M}(\lambda)=M^{(a)}(\lambda)\gamma\mathbf{a}_1+M^{(\Omega,1)}(\lambda)\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}+M^{(u)}(\lambda)\mathbf{u}+M^{(\Omega)}(\lambda)\boldsymbol{\Omega} \qquad (15)$$

$$h=-\mathbf{e}_j^{(3)}\cdot\mathbf{e}_r+\beta[(1+\beta)^2+\beta^2((\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{e}_r)^2-\mathbf{u}_0^2)]^{-1/2}[(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{e}_r)(\mathbf{e}_j^{(3)}\cdot\mathbf{e}_r)-\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{e}_j^{(3)}]$$

$$\mathbf{e}_j^{(3)}=(\delta_j^1,\delta_j^2,\delta_j^3)^T,\ \mathbf{v}=\beta v_r\mathbf{e}_r+v_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{r}=(1+\beta\xi)\mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned}
&c_{ac}^{-2}\lambda p+\{0,c_{ac}^{-2}\lambda(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}\times\mathbf{r}),0,0\}+\nabla\cdot[(1+c_{ac}^{-2}\mathcal{P}^{(0)})\mathbf{v}+\\
&+c_{ac}^{-2}(p+\{0,(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}\times\mathbf{r}),0,0\})\mathbf{v}^{(0)}+\\
&+c_{ac}^{-2}[p\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r}+(p^{(0)}+\gamma(\mathbf{g}-\mathbf{a}_0)\cdot\mathbf{r})\{0,\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{r},0,0\}]]=0\\
&\lambda\mathbf{v}+\{0,\lambda\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}\times\mathbf{r},0,0\}+\nabla(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}+\{0,\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^{(0)},0,0\}+\mathbf{v}^{(0)}\cdot\mathbf{v})+2(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{v}+\\
&+\{0,\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{v}^{(0)},0,0\})-(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r}+\mathbf{v}^{(0)})\times(\nabla\times\mathbf{v})-(\{0,\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{r},0,0\}+\mathbf{v})\times \qquad (16)\\
&\times(\nabla\times\mathbf{v}^{(0)})=-(1+c_{ac}^{-2}\mathcal{P}^{(0)})^{-1}\nabla p+\beta^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})/\sigma_1-\beta^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})/\sigma-\\
&-\{\mathbf{e}_j^{(3)},0,\beta\lambda^2\mathbf{e}_j^{(3)},0\}+c_{ac}^{-2}[(1+c_{ac}^{-2}\mathcal{P}^{(0)})^{-2}(p+\{0,(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{r}),0,0\})\nabla\mathcal{P}^{(0)}+\\
&+\{0,(1+c_{ac}^{-2}\mathcal{P}^{(0)})^{-1}\mathcal{P}^{(0)}\nabla((\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{r})),0,0\}]\\
&\mathbf{v}\big|_{\xi=0}=\{0,0,0,-\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{e}_r\},\ \mathbf{v}\big|_{\xi=h_0}=\{0,\beta\mathbf{e}_j^{(3)}\times\mathbf{u}_0,-\beta(\lambda\mathbf{e}_j^{(3)}-\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{e}_j^{(3)})-\\
&-h(\partial\mathbf{v}^{(0)}/\partial\xi)\big|_{\xi=h_0},0\};\ \{Q^{(a)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)},Q^{(\Omega,1)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)},Q^{(u)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)},Q^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}\}=\\
&=\int_0^\pi\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\left(-p\big|_{\xi=0}+\frac{\beta^2}{\sigma_1}\frac{\partial v_r}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\right)\mathbf{e}_r+\frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\vartheta+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi\right)\right]\\
&\{M^{(a)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)},M^{(\Omega,1)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)},M^{(u)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)},M^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}\}=\{0,0,0,\tfrac{8}{3}\pi\beta\mathbf{e}_j^{(3)}\}+\\
&+\int_0^\pi\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi[(\partial v_\vartheta/\partial\xi)\big|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi-(\partial v_\varphi/\partial\xi)\big|_{\xi=0}\mathbf{e}_\vartheta]
\end{aligned}$$

Характеристический квазимногочлен

(14), (15) $\Rightarrow$ $$D(\lambda)=\begin{vmatrix} B_{uu}(\lambda) & B_{u\alpha}(\lambda) \\ B_{\alpha u}(\lambda) & B_{\alpha\alpha}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&B_{uu}(\lambda)=\beta\frac{\rho_2}{\rho}\lambda^2\operatorname{diag}(1,1,1)+(k_{1a}\lambda+k_{2a})B^{(1)}-\frac{3}{4\pi}Q^{(u)}(\lambda)\\
&B_{u\alpha}(\lambda)=\frac{3}{4\pi}Q^{(\Omega)}(\lambda)A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})B^{(3)}(\lambda)\\
&B_{\alpha u}(\lambda)=-\frac{3}{4\pi}\frac{\beta}{\sigma}A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})M^{(u)}(\lambda)\\
&B_{\alpha\alpha}(\lambda)=\frac{\rho_2}{\rho}[J_1\lambda\operatorname{diag}(1,0,0)+(J\lambda^2+J_1\omega_2^{(0)}B^{(2)}\lambda)B(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\operatorname{diag}(0,1,1)]+\\
&+\frac{3}{4\pi}\frac{\beta}{\sigma}A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})M^{(\Omega)}(\lambda)A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})B^{(3)}(\lambda)\\
&B^{(1)}=\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})[\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})]^T;\ B^{(2)}=[b_{kj}^{(2)}],\ b_{kj}^{(2)}=\delta_k^2\delta_j^3-\delta_k^3\delta_j^2,\ k,j=1,2,3;\\
&B^{(3)}(\lambda)=A(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\operatorname{diag}(1,0,0)+(\lambda B_1(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})+\omega_2^{(0)}\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})/\partial\boldsymbol{\alpha})\operatorname{diag}(0,1,1)
\end{aligned} \tag{18}$$

Аналитичность в высокочастотной области

- Ранее доказано: Передаточные функции объектов управления с распределенными параметрами для упругих сред, где внутренние демпфирующие силы имеют малую, но конечную величину относительно упругих сил, аналитичны при $\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda>-\infty$.
- Функции $Q^{(a)}(\lambda)$,$Q^{(\Omega,1)}(\lambda)$,$Q^{(u)}(\lambda)$, $Q^{(\Omega)}(\lambda)$, $M^{(a)}(\lambda)$, $M^{(\Omega,1)}(\lambda)$, $M^{(u)}(\lambda)$, $M^{(\Omega)}(\lambda)$; $Q^{(a)},Q^{(\Omega,1)},Q^{(u)},Q^{(\Omega)},M^{(a)},M^{(\Omega,1)},M^{(u)},M^{(\Omega)}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{(3,3)}$, аналитичны при $\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda>-\infty$.

Асимптотическое интегрирование (16) в высокочастотной области

Метод сращиваемых разложений, $|\lambda|^{-1/2}\ll 1$

$$Q^{(a)}(\lambda)=-\tfrac{4}{3}\pi\beta[(1+\sigma_1 s)^{1/2}(\sigma_1\lambda)^{-1/2}+2(\sigma\lambda)^{-1/2}]\mathrm{diag}(1,1,1)+\ldots$$

$$M^{(a)}(\lambda)=O(1/\lambda),\ Q^{(\Omega,1)}(\lambda)=O(1),\ M^{(\Omega,1)}(\lambda)=-\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{\sigma\lambda}\,\mathrm{diag}(1,1,1)+\ldots$$

$$Q^{(u)}(\lambda)=-\tfrac{4}{3}\pi\beta^2\lambda\left[(1+\sigma_1 s)^{1/2}(\lambda/\sigma_1)^{1/2}+2(\lambda/\sigma)^{1/2}\right]\mathrm{diag}(1,1,1)+\ldots, \quad (19)$$

$$M^{(u)}(\lambda)=O(\lambda),\ Q^{(\Omega)}(\lambda)=O(1)$$

$$M^{(\Omega)}(\lambda)=\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{\sigma\lambda}\,\mathrm{diag}(1,1,1)+\ldots,\ s=c_{ac}^2/(\beta^2\lambda),\ \lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda>-\infty$$

$$\text{(17)-(19)} \Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \frac{D(\lambda)}{\lambda^{11}} = \beta^3(\rho_2 \,/\, \rho)^6 J_1 J_2^2 \cos\alpha_{2_2}^{(0)}, \quad \operatorname{Re}\lambda > -\infty \qquad (20)$$

Исследование устойчивости

Как следует из теорем об устойчивости КДС, при условии аналитичности передаточных функций поддерживающего слоя в низкочастотной подобласти (что легко проверяется численно), сферический гидродинамический подвес будет асимптотически устойчив на кривой подвижного равновесия, если

$$\Delta_{0\le\omega<\infty} \arg D(i\omega) = \frac{11\pi}{2}$$

и неустойчив в противном случае.

Асимпт/ интегрирование (16) в области в области выше средних частот

$$
\begin{aligned}
&Q^{(a)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = -\mathbf{Q}_j^{(1)}(\lambda),\;\; M^{(a)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = -\mathbf{M}_j^{(1)}(\lambda)\\
&Q^{(\Omega,1)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = \lambda\mathbf{Q}_j^{(2)}(\lambda) + \mathbf{Q}_j^{(4)}(\lambda)\times\mathbf{u}_0 + \mathbf{Q}_j^{(6)}(\lambda)\\
&M^{(\Omega,1)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = \lambda\mathbf{M}_j^{(2)}(\lambda) + \mathbf{M}_j^{(4)}(\lambda)\times\mathbf{u}_0 + \mathbf{M}_j^{(6)}(\lambda)\\
&Q^{(u)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = -\beta\lambda^2\mathbf{Q}_j^{(1)}(\lambda) - \lambda\mathbf{Q}_j^{(4)}(\lambda) + \mathbf{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{Q}_j^{(4)}(\lambda) - \mathbf{Q}_j^{(5)}(\lambda)\\
&M^{(u)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = -\beta\lambda^2\mathbf{M}_j^{(1)}(\lambda) - \lambda\mathbf{M}_j^{(4)}(\lambda) + \mathbf{\Omega}_1^{(0)}\times\mathbf{M}_j^{(4)}(\lambda) - \mathbf{M}_j^{(5)}(\lambda)\\
&Q^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = -\mathbf{Q}_j^{(3)}(\lambda),\;\; M^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)} = -\mathbf{M}_j^{(3)}(\lambda) + \tfrac{8}{3}\pi\beta\mathbf{e}_j^{(3)}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
s_1 = (c_{ac}/\lambda)^2 = O(1),\;\; s_2 = s_1 + \beta^2/(\sigma_1\lambda) = O(1),\;\; \lambda \sim O(c_{ac})
\qquad
\lim_{\lambda\to\infty} s_{1,2} = 0
\tag{22}
$$

$$
\mathbf{Q}_j^{(1)}(\lambda) =
$$

$$
= \int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\left(-\frac{c_{ac}^2}{\lambda}p\Big|_{\eta=0} + \frac{\beta^2}{\sigma_1}\sqrt{\lambda}\frac{\partial v_r}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}\right)\mathbf{e}_r + \frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}\mathbf{e}_\varphi\right)\right]
$$

$$
\mathbf{M}_j^{(1)}(\lambda) = \sqrt{\lambda}\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi[(\partial v_\vartheta/\partial\eta)|_{\eta=0}\mathbf{e}_\varphi - (\partial v_\varphi/\partial\eta)|_{\eta=0}\mathbf{e}_\vartheta],\;\; \eta = \xi\sqrt{\lambda}
$$

$$
p|_{\eta=0} = \lambda^{-1}p_0^{(e)}\Big|_{\xi=0} + \lambda^{-3/2}p_1^{(e)}\Big|_{\xi=0} + \lambda^{-2}p_0^{(e)}\Big|_{\xi=0}
\tag{23}
$$

$$
\left.\frac{\partial v_r}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\left[\left.\frac{\partial v_{r_0}^{(e)}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} + \left.(\nabla^{(s)}\cdot\mathbf{v}_0^{(e)})\right|_{\xi=0}\right]+
$$

$$
+\frac{1}{\lambda^2}\left[\left.\frac{\partial v_{r_1}^{(e)}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} + \left.(\nabla^{(s)}\cdot\mathbf{v}_1^{(e)})\right|_{\xi=0} + \frac{2\beta}{\sqrt{\sigma}}\left.(\nabla^{(s)}\cdot\mathbf{v}_0^{(e)})\right|_{\xi=0}\right]
$$

$$
\left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda}\left.v_{\vartheta_0}^{(e)}\right|_{\xi=0} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\left[\sqrt{\sigma}\left.v_{\vartheta_1}^{(e)}\right|_{\xi=0} + \beta\left.v_{\vartheta_0}^{(e)}\right|_{\xi=0} + \left.\frac{\partial v_{\vartheta_0}^{(e)}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}\right]+
$$

$$
+\frac{1}{\lambda^2}\left[\left.\frac{\partial v_{\vartheta_1}^{(e)}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} + \sqrt{\sigma}\left.v_{\vartheta_2}^{(e)}\right|_{\xi=0} + \beta\left.v_{\vartheta_1}^{(e)}\right|_{\xi=0} - \frac{\beta^2}{4\sigma}\left.v_{\vartheta_0}^{(e)}\right|_{\xi=0} -\right.
$$

$$
-\tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\Big[-\mathbf{e}_\vartheta\cdot\nabla^{(s)}\big((\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}-\boldsymbol{\Omega}^{(0)})\times\mathbf{e}_r\cdot\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\big) - 2(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}-\boldsymbol{\Omega}^{(0)})\times\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\cdot\mathbf{e}_\vartheta +
$$

$$
+\big((\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}-\boldsymbol{\Omega}^{(0)})\cdot\mathbf{e}_\vartheta\big)\nabla^{(s)}\cdot\big(\mathbf{e}_r\times\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\big)+
$$

$$
\left.+(\beta^2/\sigma)\mathbf{e}_\vartheta\cdot\big(\nabla^{(s)}(\nabla^{(s)}\cdot\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}) - \nabla^{(s)}\times(\nabla^{(s)}\times\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0})\big)\Big]\right] \tag{24}
$$

$$\left.\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=\frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda}\left.v_{\varphi_0}^{(e)}\right|_{\xi=0}+\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\left[\sqrt{\sigma}\left.v_{\varphi_1}^{(e)}\right|_{\xi=0}+\beta\left.v_{\varphi_0}^{(e)}\right|_{\xi=0}+\left.\frac{\partial v_{\varphi_0}^{(e)}}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\right]+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\left[\left.\frac{\partial v_{\varphi_1}^{(e)}}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}+\sqrt{\sigma}\left.v_{\varphi_2}^{(e)}\right|_{\xi=0}+\beta\left.v_{\varphi_1}^{(e)}\right|_{\xi=0}-\frac{\beta^2}{4\sigma}\left.v_{\varphi_0}^{(e)}\right|_{\xi=0}-\right.$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\left[-\mathbf{e}_{\varphi}\cdot\nabla^{(s)}\left(\left(\mathbf{\Omega}_1^{(0)}-\mathbf{\Omega}^{(0)}\right)\times\mathbf{e}_r\cdot\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\right)-2\left(\mathbf{\Omega}_1^{(0)}-\mathbf{\Omega}^{(0)}\right)\times\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\cdot\mathbf{e}_{\varphi}+\right.$$

$$+\left(\left(\mathbf{\Omega}_1^{(0)}-\mathbf{\Omega}^{(0)}\right)\cdot\mathbf{e}_{\varphi}\right)\nabla^{(s)}\cdot\left(\mathbf{e}_r\times\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\right)+$$

$$\left.\left.+(\beta^2/\sigma)\mathbf{e}_{\varphi}\cdot\left(\nabla^{(s)}\left(\nabla^{(s)}\cdot\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\right)-\nabla^{(s)}\times\left(\nabla^{(s)}\times\left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}\right)\right)\right]\right]$$

$$\mathbf{v}_0^{(e)}=-s_2\nabla p_0^{(e)}+\mathbf{e}_j^{(3)},\ p_0^{(e)}-s_2\nabla^2 p_0^{(e)}=0$$

$$\left.\frac{\partial p_0^{(e)}}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=\frac{\beta}{s_2}\mathbf{e}_j^{(3)}\cdot\mathbf{e}_r \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial p_0^{(e)}}{\partial\xi}\right|_{\xi=h_0}-\frac{\beta^2\nabla^{(s)}h_0}{(1+\beta h_0)^2}\cdot\left.\left(\nabla^{(s)}p_0^{(e)}\right)\right|_{\xi=h_0}=\frac{\beta}{s_2}\left[\mathbf{e}_r-\frac{\beta\nabla^{(s)}h_0}{1+\beta h_0}\right]\cdot\mathbf{e}_j^{(3)}$$

$$\mathbf{v}_1^{(e)} = -s_2 \nabla p_1^{(e)}, \; p_1^{(e)} - s_2 \nabla^2 p_1^{(e)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial p_1^{(e)}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{\beta}{s_2\sqrt{\sigma}} \nabla^{(s)} \cdot \left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=0}; \; \left.\frac{\partial p_1^{(e)}}{\partial \xi}\right|_{\xi=h_0} - \frac{\beta^2 \nabla^{(s)} h_0}{(1+\beta h_0)^2} \cdot \left.(\nabla^{(s)} p_1^{(e)})\right|_{\xi=h_0} = \qquad (26)$$

$$= \frac{\beta}{s_2\sqrt{\sigma}(1+\beta h_0)^2} \nabla^{(s)} \cdot \left[\left((1+\beta h_0)^2 + \beta^2 (\nabla^{(s)} h_0)^2\right)^{1/2} \left.\mathbf{v}_0^{(e)}\right|_{\xi=h_0} \right]$$

$$\mathbf{Q}_j^{(3)}(\lambda) = O(1/\sqrt{\lambda}), \; \mathbf{M}_j^{(3)}(\lambda) = -\tfrac{8}{3}\pi(\sigma\lambda)^{1/2}\left[1 + \beta(\sigma\lambda)^{-1/2} + \tfrac{1}{4}\beta^2(\sigma\lambda)^{-1}\right] \qquad (27)$$

- $\mathbf{Q}_j^{(4)}(\lambda)$, $\mathbf{M}_j^{(4)}(\lambda)$ вычисляются аналогично (23)-(26)
- Приближенные выражения для передаточных функций поддерживающего слоя для модели вязкой несжимаемой жидкости при $\lambda \to \infty$, $\mathrm{Re}\lambda$>-∞ следуют из (23)-(27) в предположении $c_{ac} \to \infty$ (ур-ие Гельмгольца переходит в ур-ие Пуассона).
- Для модели слоя на основе упрощенных уравнений Навье-Стокса приближенные выражения для передаточных функций поддерживающего слоя получаются дальнейшим отбрасываем малых $\sim O(\beta^2)$ (давление определяется из двумерного аналога уравнения Лапласа на поверхности единичной сферы)

Заключение

- Получена комбинированная динамическая модель сферического гидродинамического подвеса, учитывающая:
  – угловые вибрации корпуса прибора
  – аксиальной жесткости подвеса
  – разность главных центральных моментов инерции ротора
  – сжимаемости жидкости поддерживающего слоя
- Получено условие устойчивости сферического гидродинамического подвеса на кривой подвижного равновесия

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!