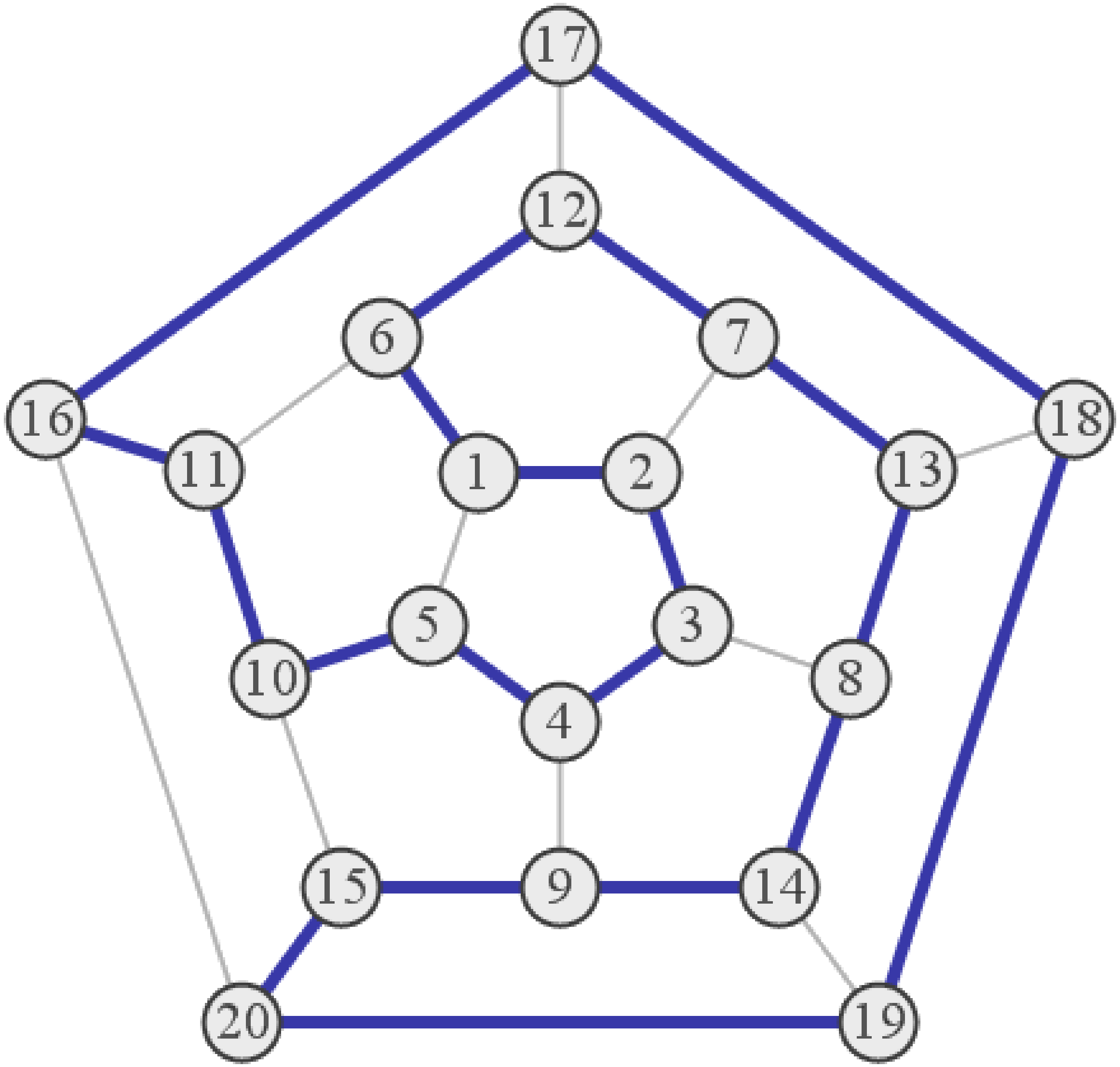
О поиске гамильтонова цикла методом перебора гамильтоновых подграфов

А. В. Гавриков

ООО «Яндекс.Маркет»

Гамильтонов цикл



Публикации по теме статьи

1. *Литтл, Мерти*, *Суини*, *Кэрелом*. Метод ветвей и границ. 1963 г. $O(n!)$

2. *Held M.*, *Karp R.M.* Метод динамического программирования. 1962 г. $O(n\ 2^n)$

3. *Chena J.*, *Feng Q.*, *Liuc Y.*, *Lub S.*, *Wang J.* Divide-and-Color. 2011 г. $O^*\left(4^{n+o(n)}\right)$

4. *Fomin F.*, *Lokshtanov D.*, *Panolan F.*, *Saurabh S.* Representative Sets. 2016 г. $O^*(2.851^n)$

Подходы алгоритма

1. Перебор гамильтоновых разбиений

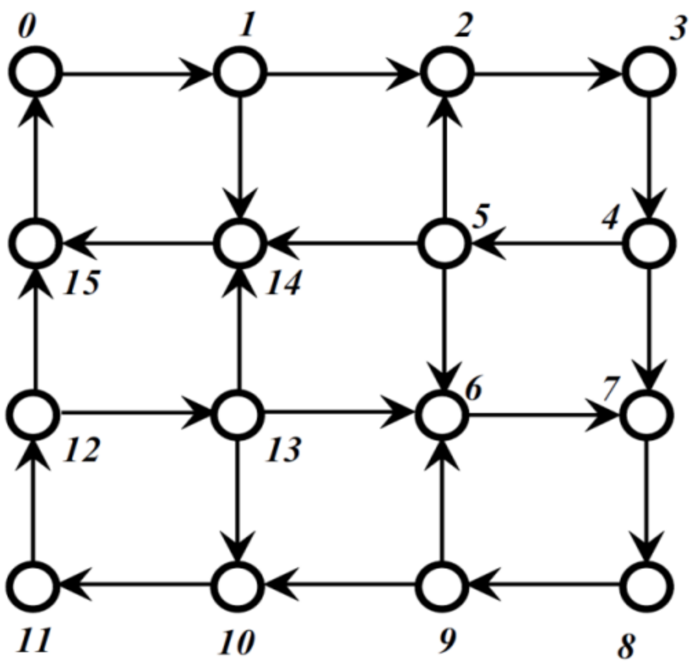
2. Удаление некоторых дуг, которые не входят в какой-либо гамильтоновый цикл

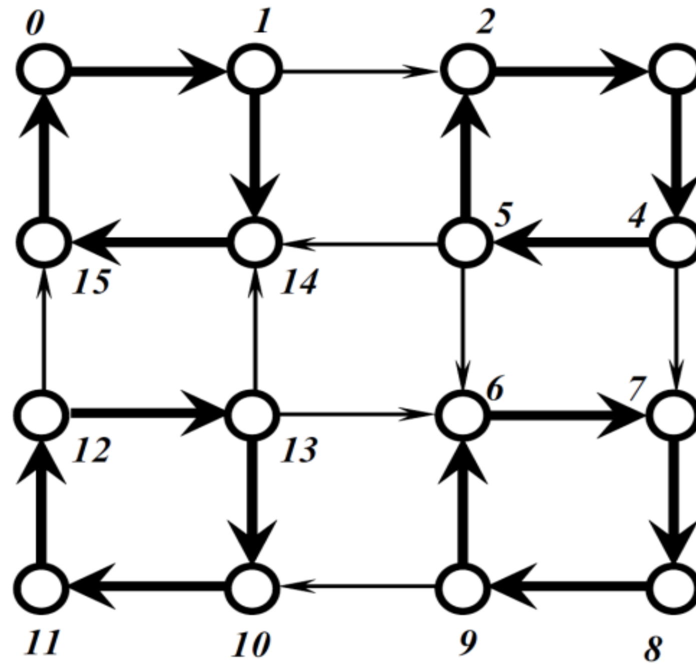
3. Ускоренное углубление по дереву перебора вглубь

4. Мультицепной метод

Гамильтоновы разбиения

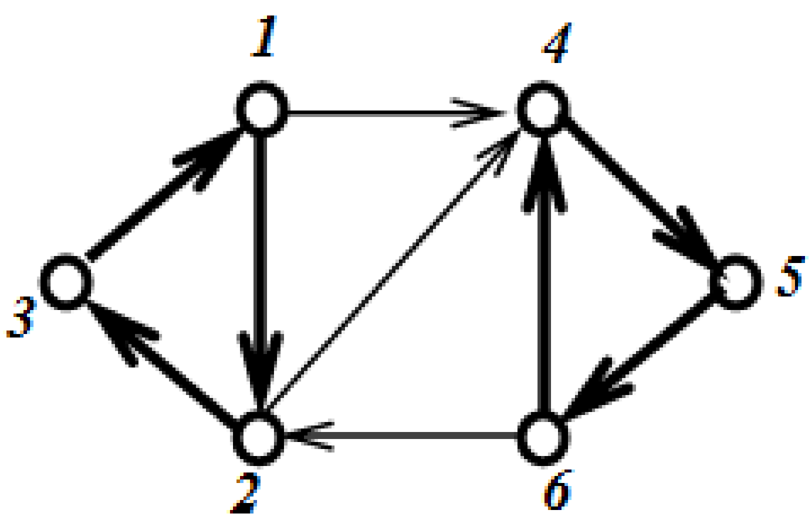
Под гамильтоновым разбиением орграфа $G = (V, \alpha)$ понимается разбиение его вершин на непересекающиеся подмножества V_0, V_1, V_2, , V_{k-1} такие, что все индуцируемые ими подграфы орграфа G содержали гамильтоновы контуры

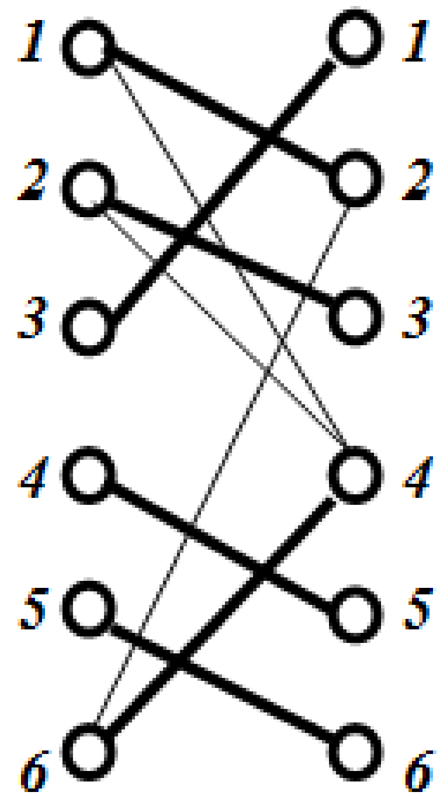




Нахождение разбиений

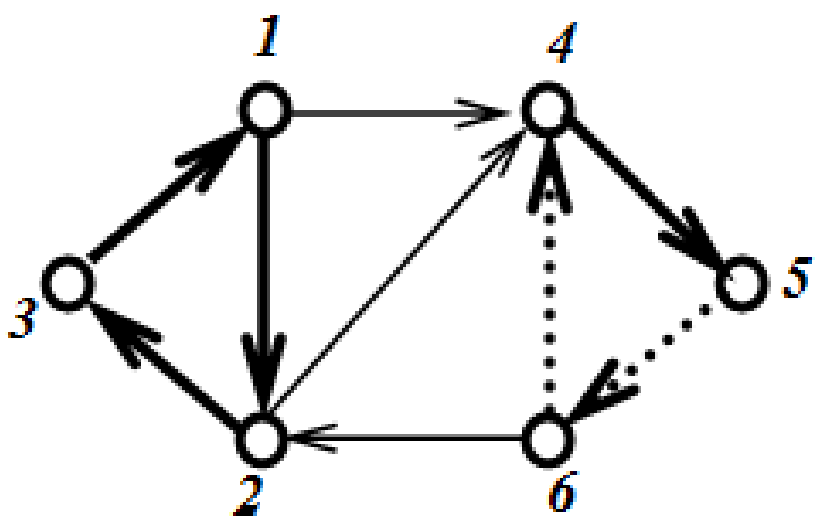
Для нахождения гамильтонова разбиения по заданному орграфу строим двудольный орграф. Дуги в максимальном паросочетание двудольного орграфа соответствуют гамильтонову разбиению

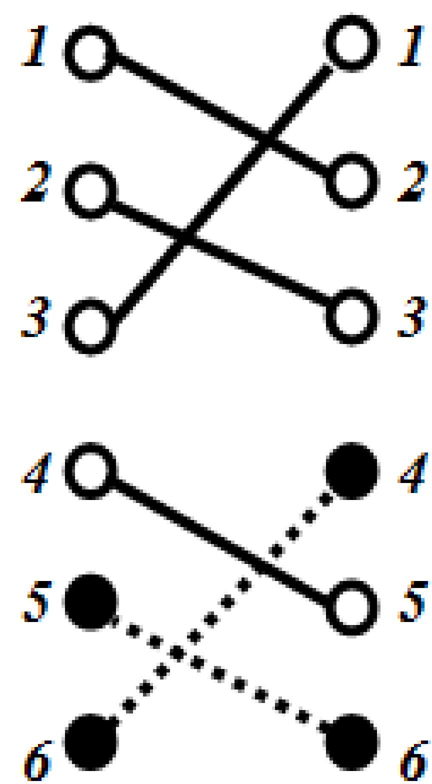




Гамильтоновы дуги

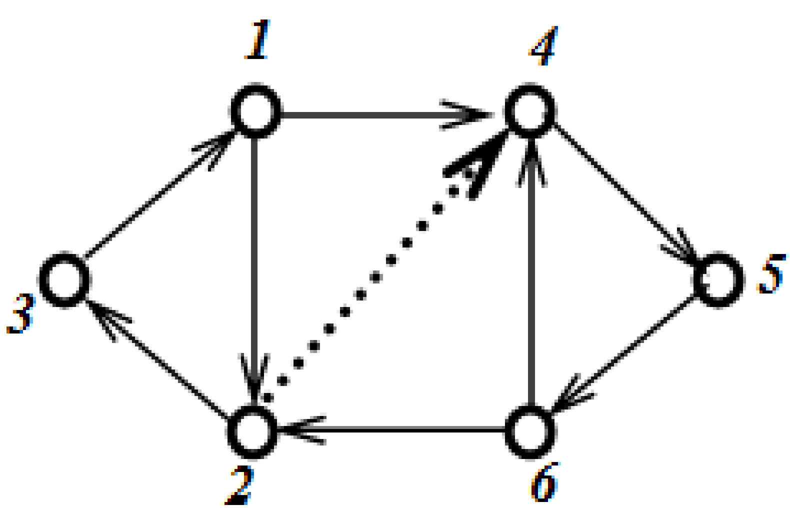
При помощи нахождения паросочетаний в двудольных графах можно проверить, что некоторое множество дуг входит одновременно в одно из разбиений

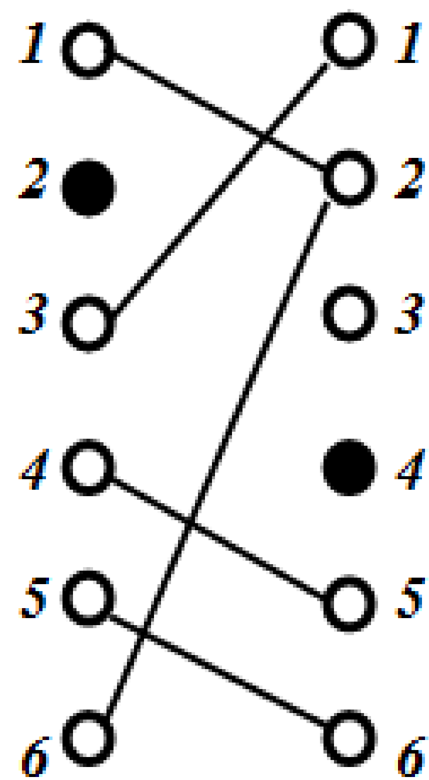




Удаление негамильтоновых дуг

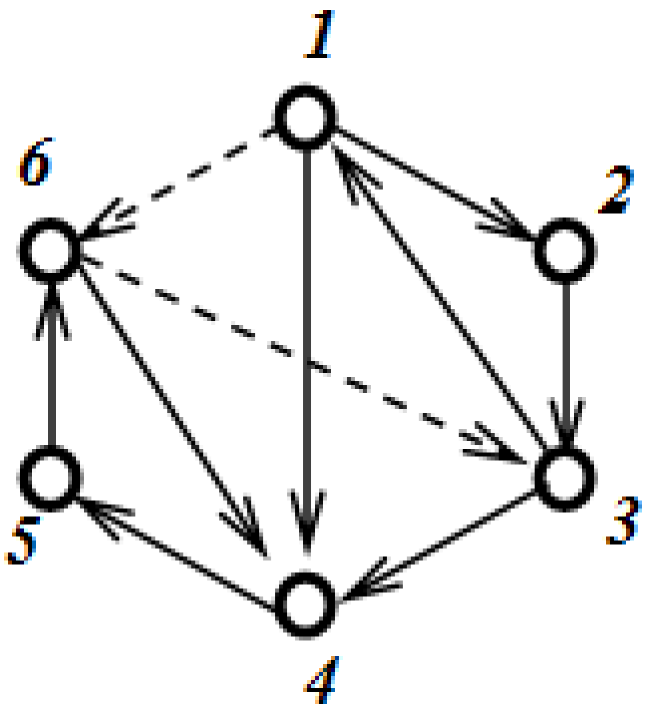
Если дуга (u, v) не попадает ни в одно из гамильтоновых разбиений орграфа, то в двудольном орграфе нет потока мощности максимального минус один

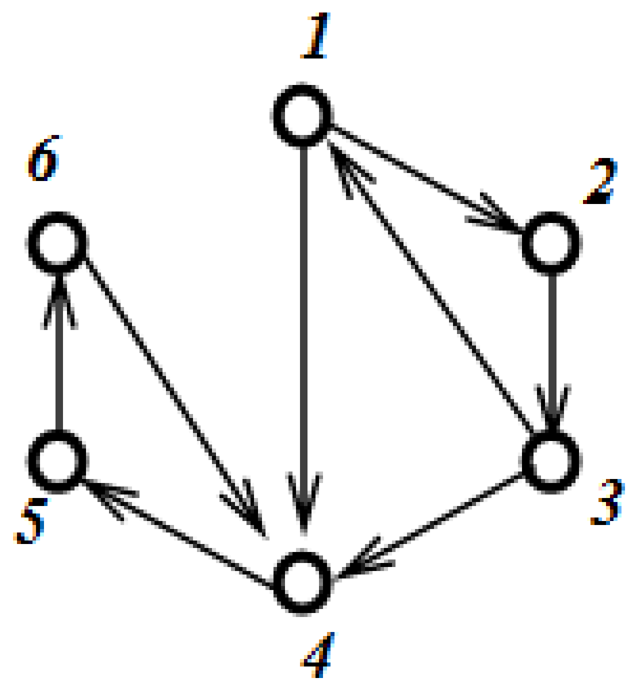




Удаление негамильтоновых дуг

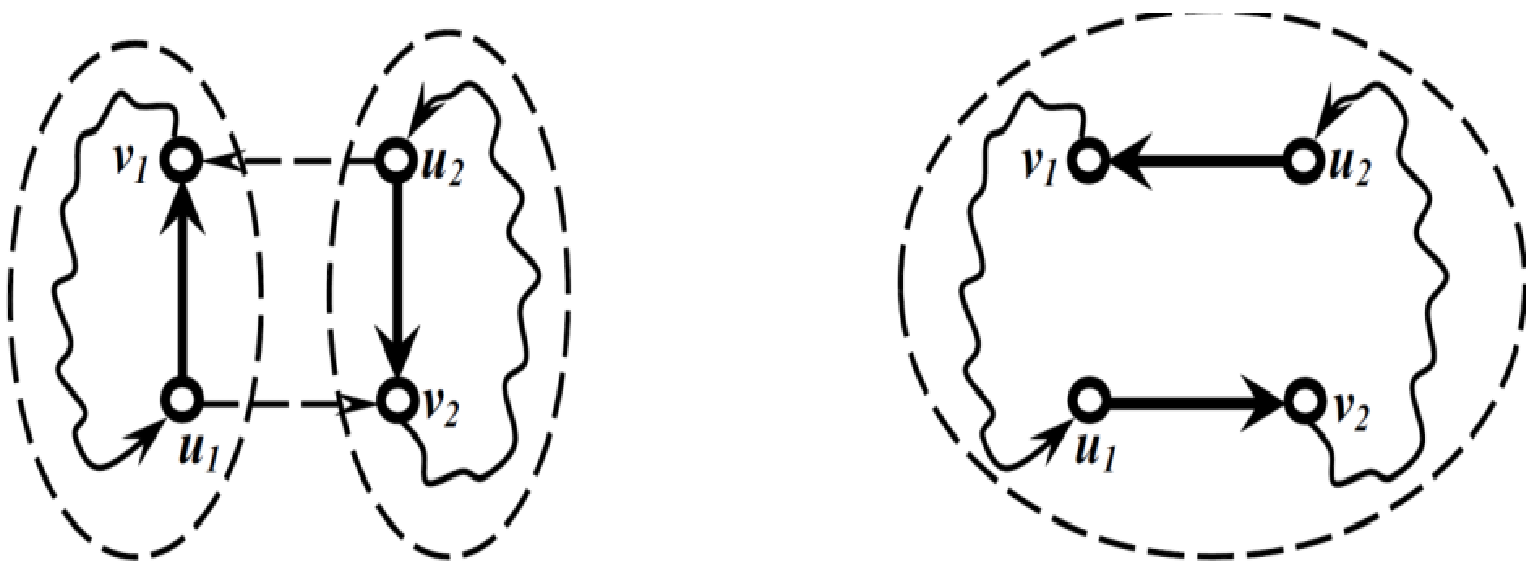
При удалении негамильтоновых орграф может стать не сильно связным





Эвристика

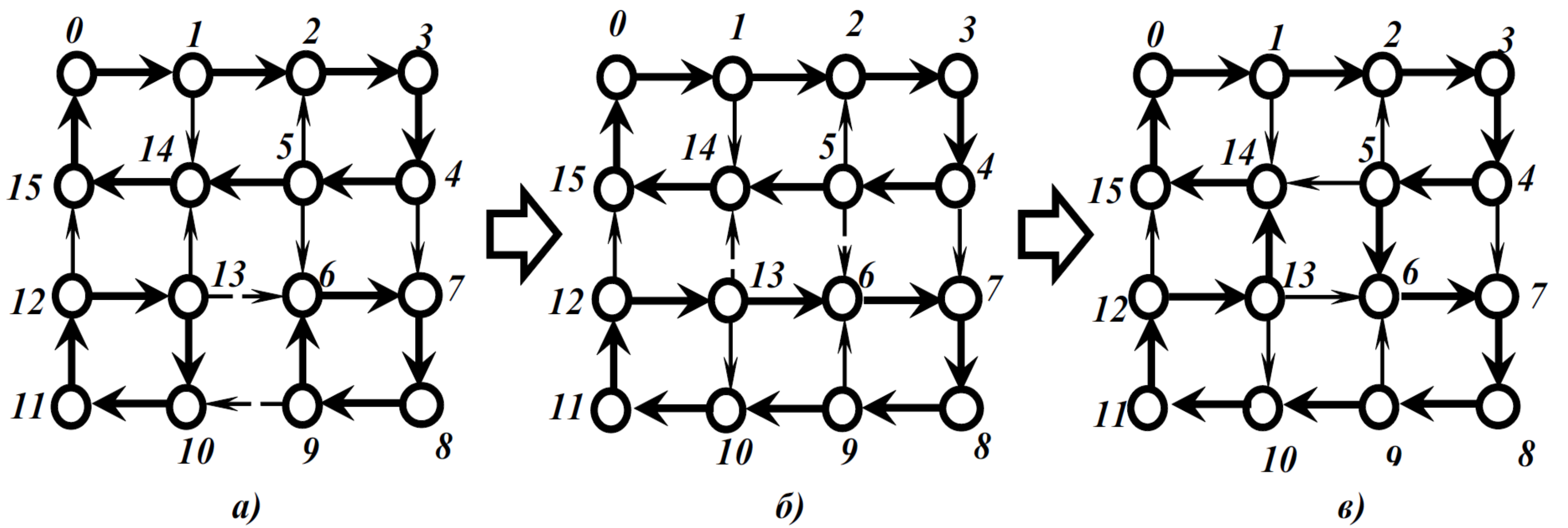
Пусть в одной компоненте связности разбиения существует дуга (u_1, v_1), входящая в некоторый гамильтонов цикл, в другой компоненте связности существует дуга (u_2, v_2), а в орграфе есть при этом дуги (u_1, v_2) и (u_2, v_1). В таком случае, можно объединить две компоненты связности, заменим пару дуг (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на (u_1, v_2) и (u_2, v_1)



а) *б)*

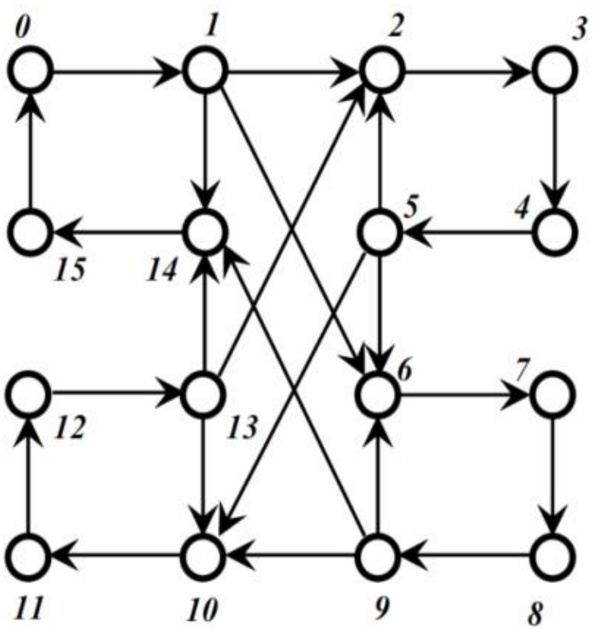
Применение эвристики

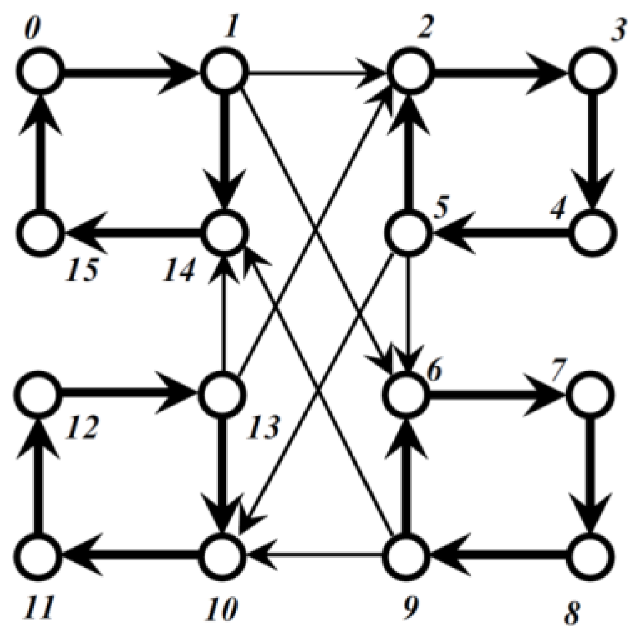
На рисунке а) показано, что можно уменьшить количество компонент связности разбиения, если заменить пару дуг (13, 10) и (9, 6) на дуги (9, 10) и (13, 6), которые выделены пунктирной линией. Получим гамильтоново разбиение на рисунке б). Далее пары дуг (13, 6), и (5, 14) можно заменить на дуги (13, 14) и (5, 6). После этого получим гамильтоновой цикл в исходном орграфе, изображенный на рисунке в)



Применение эвристики

Не в каждом орграфе можно найти гамильтонов цикл, применяя эвристику





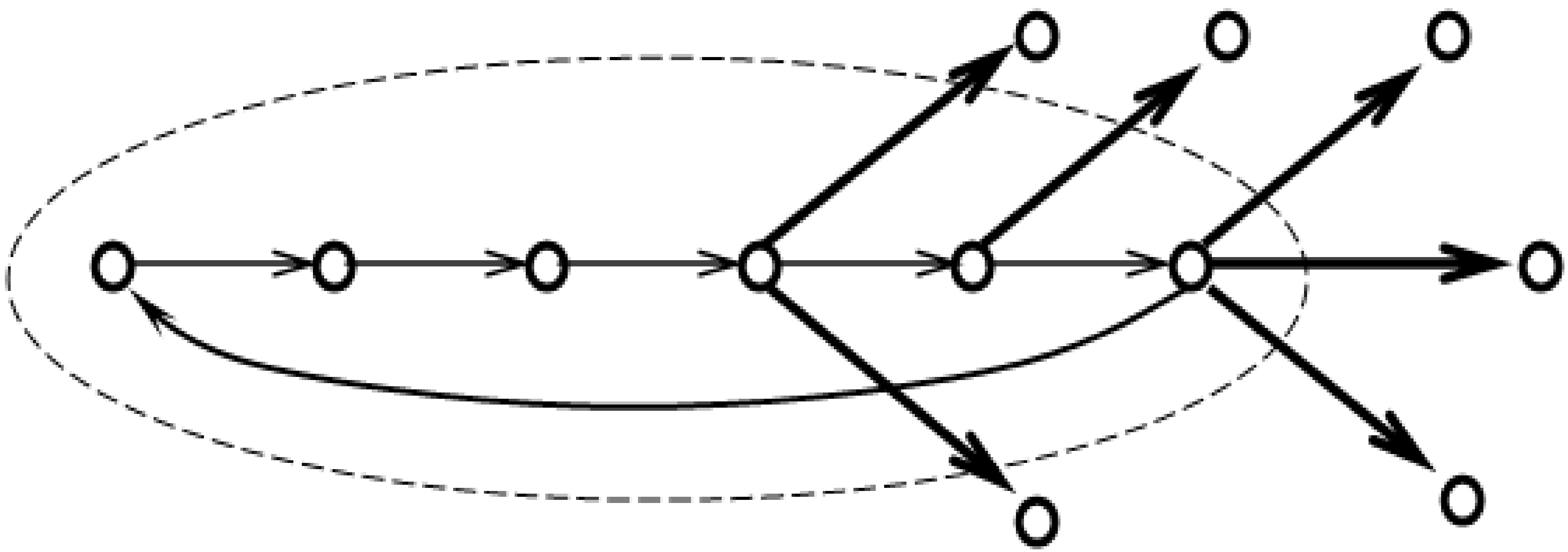
Статистика по эвристике

При генерации случайного орграфа $G(n,p)$ значение p будет выбрано в интервале $[\ln n/n\,, 1]$. Согласно теореме, доказанной Эрдишем и Реньи, при вероятности $p = c\ln n/n$, где $c > 1$, случайный орграф $G(n,p)$ почти наверное окажется сильно связным. Во втором столбце отражается количество случайных орграфов, которые сгенерировались не сильно связными. Для 100 вершин из 1000 тестов таких случаев всего 10, то есть ровно 1%. При этом, количество гамильтоновых циклов, найденных в сгенерированных орграфах, довольно велико

Кол-во вершин в орграфе n	Кол-во не сильно связных орграфов	Кол-во гамильтоновых циклов, найденных эвристикой	Кол-во орграфов, в которых эвристика не сработала
100	10	989	0
200	6	993	0
300	5	995	0
400	3	997	0
500	3	997	0
600	2	997	1
700	0	999	1
800	1	997	2

Техника перебора

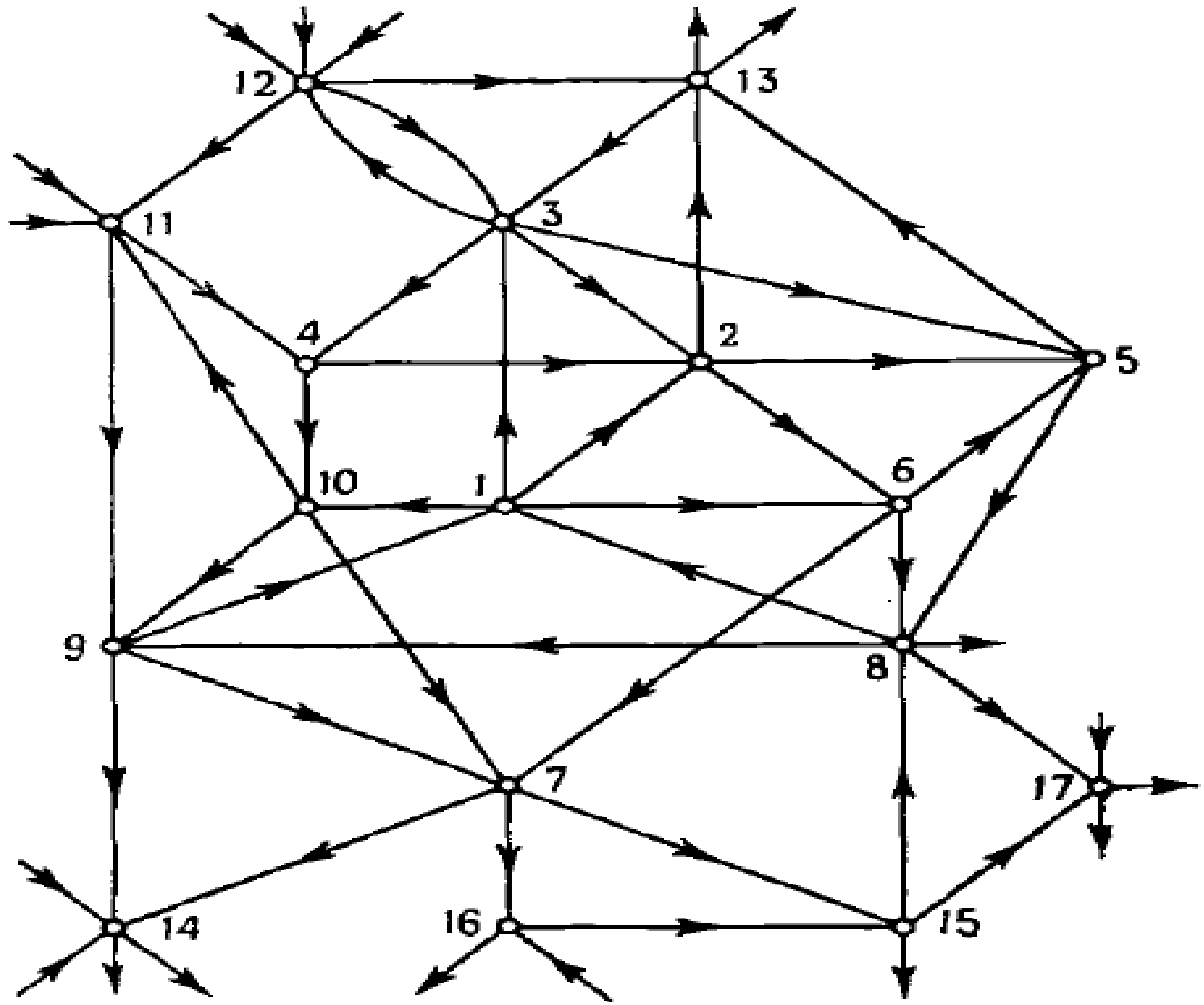
Гамильтоновы разбиения можно использовать для ускоренного углубления по дереву перебора вглубь, а не по одной вершине в классическом методе ветвей и границ. При этом данная техника позволяет использовать все известные эвристики.



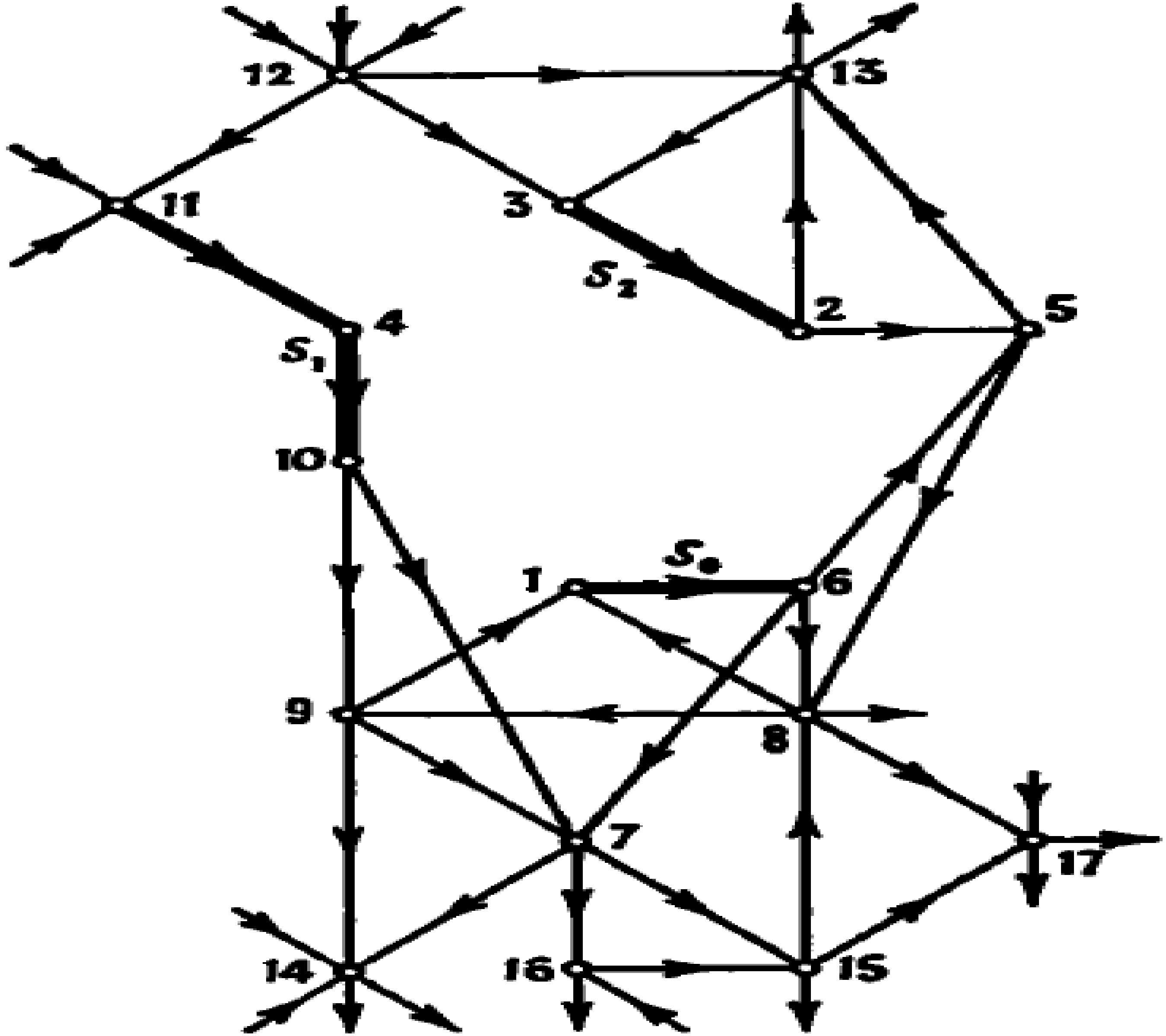
Мультицепной метод

1. Удаляем все «лишние» дуги в рассматриваемой цепи:
   a) удаляем исходящие дуги из начальной вершины цепи, за исключением дуги во вторую вершину цепи
   b) удаляем входящие дуги в конечную вершину цени, за исключением дуги из предпоследней вершину цепи
   c) удаляем все дуги, смежные «серединным» вершинам цепи, за исключением дуг для образования цепи
   d) удаляем дугу из начальной в конечную вершину цепи
2. Рассматриваем остальные вершины орграфа:
   a) помечаем вершины со степенью исхода 1, как начальные вершины цепей
   b) помечаем вершины со степенью захода 1, как конечные вершины цепей
   c) Помечаем вершины со степень исхода и захода 1, как серединные вершины цепей
3. Производим процедуру объединения цепей
4. Повторяем пункты 1-3 если в орграфе были помечены некоторые вершины или удалены какие либо дуги

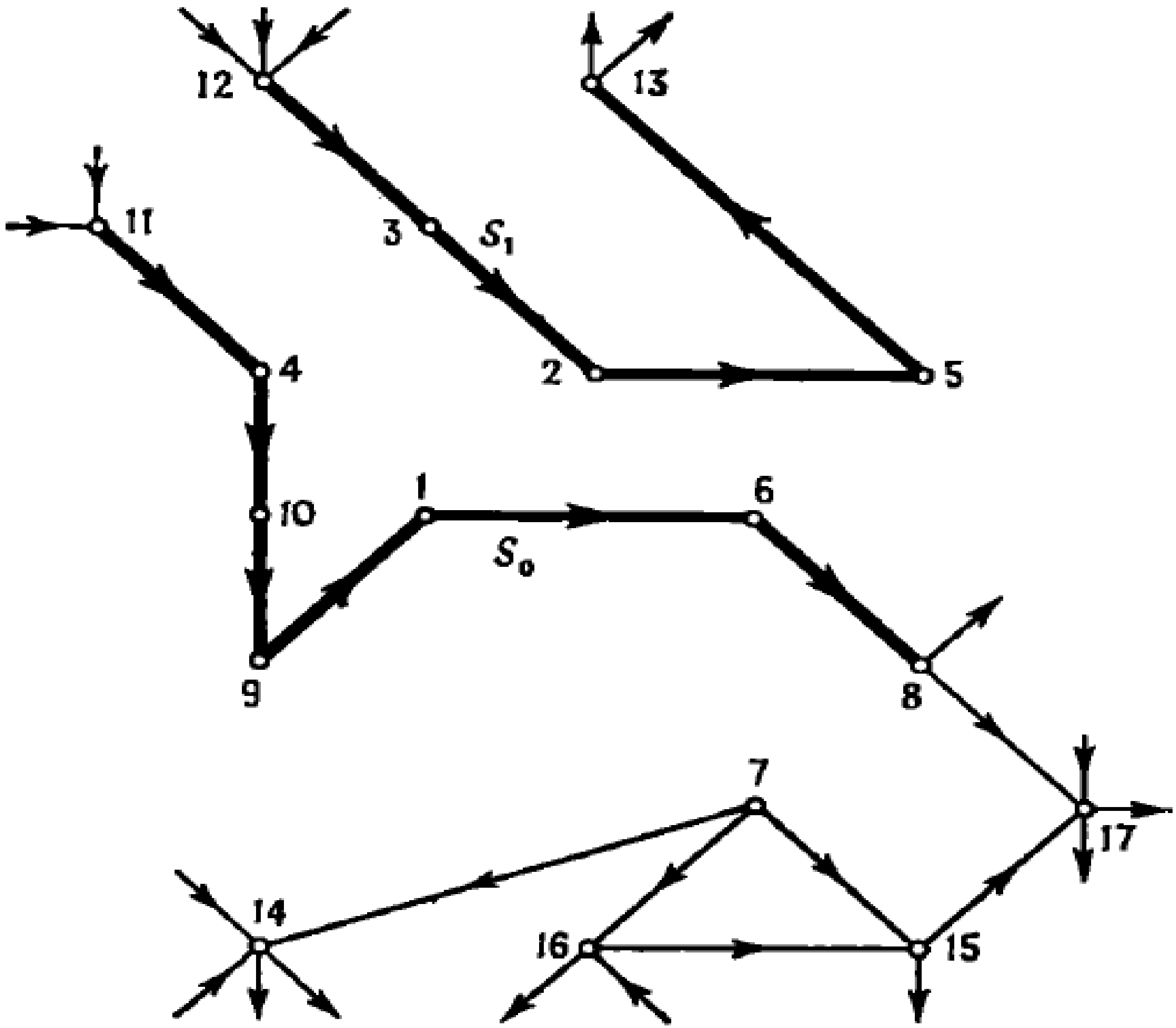
Мультицепной метод



Мультицепной метод

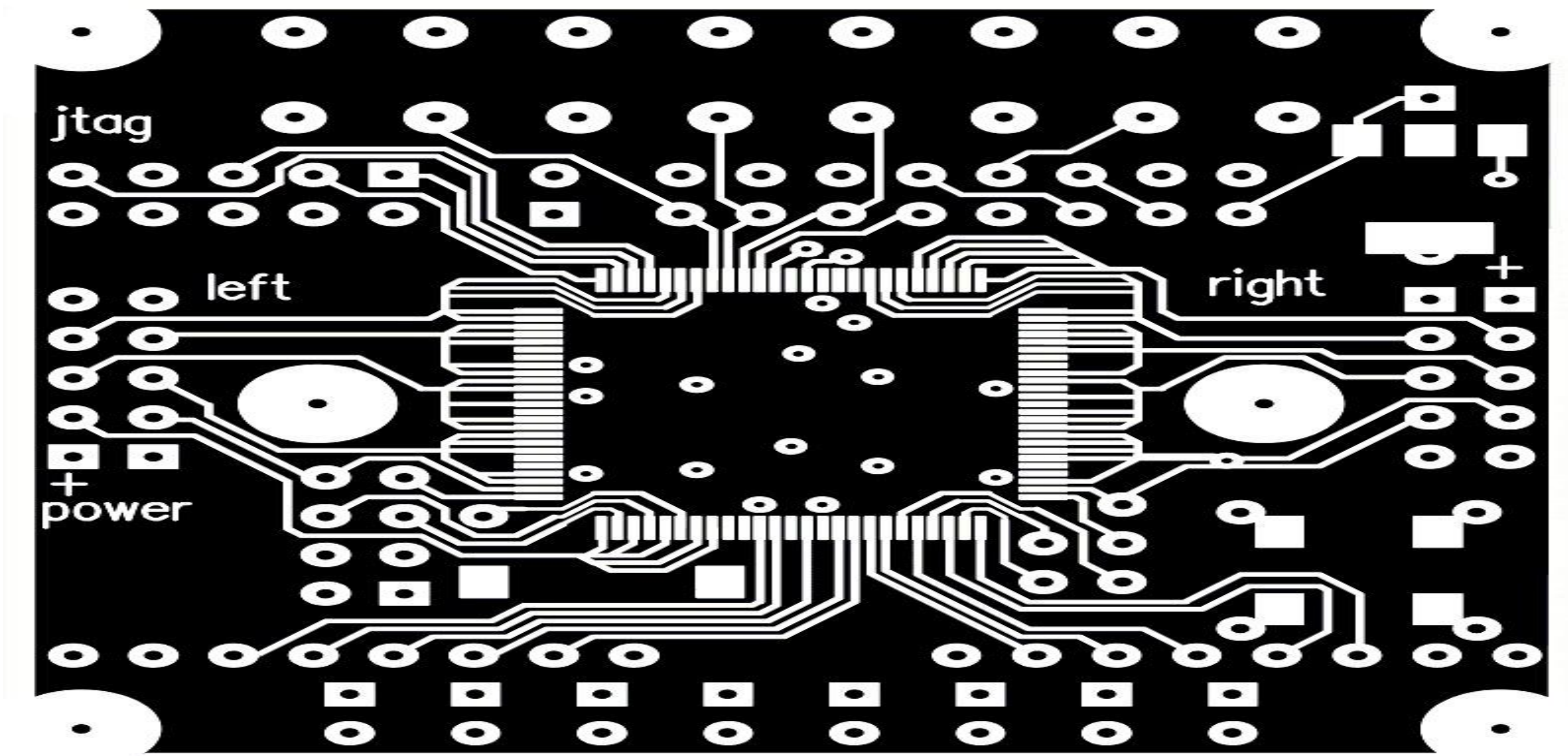


Мультицепной метод



Применение алгоритма

Создание отверстий в платах роботом

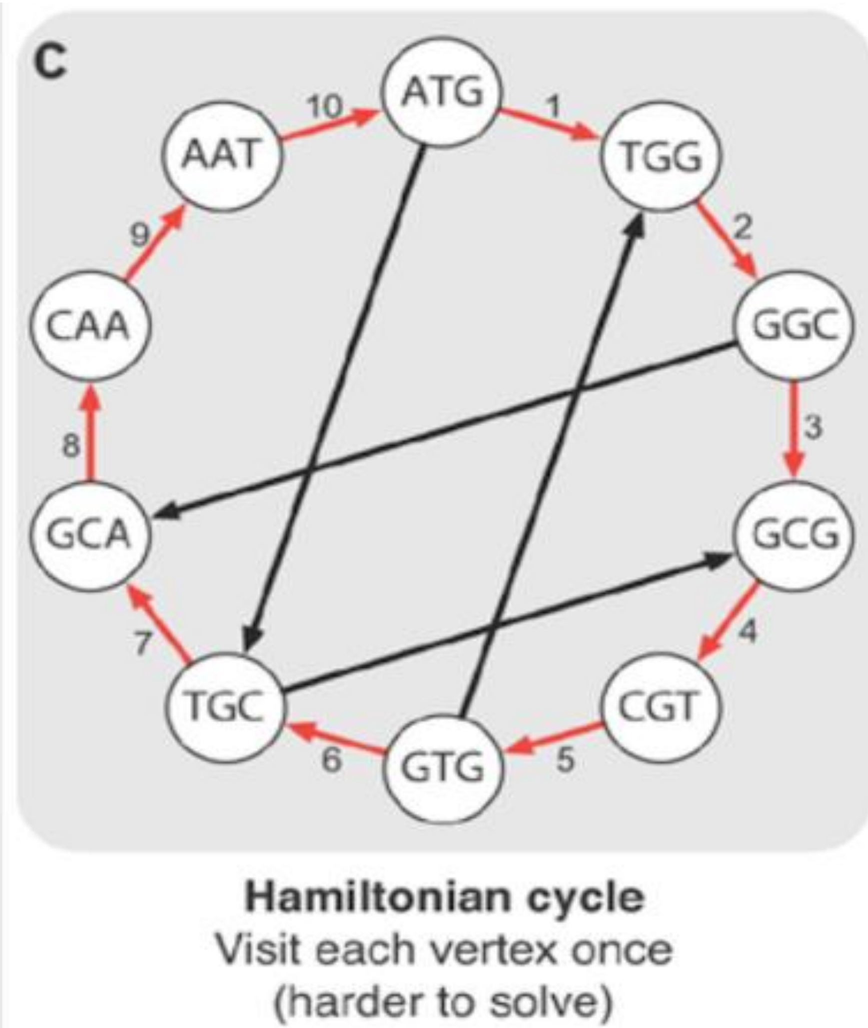


Применение алгоритма

Задача коммерческого транспорта

Применение алгоритма

Задача секвенирования генома



Литература

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука. Физматлит, 1997.

2. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверс Р.* Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 1990.

3. *Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., and Karel C.* An algorithm for the Traveling Salesman Problem // Operations Research. 1963. No. 11. P. 972–989.

4. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.

5. *Held M., Karp R.M.* A Dynamic programming approach to sequencing problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1962, V. 10, № 1, 196–210

6. *Chena J., Feng Q., Liuc Y., Lub S., Wang J.* Improved deterministic algorithms for weighted matching and packing problems // Theoretical computer science. 2011, V. 412, I. 23. P. 2503-2512.

7. *Fomin F., Lokshtanov D., Panolan F., Saurabh S.* Efficient computation of representative families with applications in parameterized and exact algorithms // Journal of the ACM (JACM), 2016, V. 63 I. 4, Article No. 29.

8. *Гэри М., Джонсон Д.*. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

9. *Bollobas B.* Random Graphs. – 2nd ed. – Cambridge Univ. Press. 2001.

10. *Гавриков А. В.* Алгоритм поиска гамильтонова цикла методом перебора разбиений орграфа на подграфы // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017610078, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09 января 2017 г.