# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ГИПЕРГРАФИЧЕСКОГО АВТОМАТА
## В ЕГО ПОЛУГРУППЕ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Молчанов В.А., Хворостухина Е.В.

VIII Международная научная конференция "Компьютерные науки и информационные технологии" памяти А. М. Богомолова

2-3 июля 2018, Саратов, СГУ им.Н.Г. Чернышевского

# Автомат

- Под автоматом будем понимать алгебраическую систему $\mathrm{A} = (\mathrm{X}, \mathrm{S}, \mathrm{Y}, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний $\mathrm{X}$, полугруппы входных символов $\mathrm{S}$, множества выходных символов $\mathrm{Y}$, функции переходов $\delta : \mathrm{X} \times \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{X}$ и выходной функции $\lambda : \mathrm{X} \times \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{Y}$, таких что для любых $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ и $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathrm{S}$ выполняются условия $\delta(\mathrm{x}, \mathrm{st}) = \delta(\delta(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \mathrm{t})$, $\lambda(\mathrm{x}, \mathrm{st}) = \lambda(\delta(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \mathrm{t})$.

# Автомат

- Под автоматом будем понимать алгебраическую систему $\mathrm{A} = (\mathrm{X}, \mathrm{S}, \mathrm{Y}, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X, полугруппы входных символов S, множества выходных символов Y, функции переходов $\delta : \mathrm{X} \times \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{X}$ и выходной функции $\lambda : \mathrm{X} \times \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{Y}$, таких что для любых $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ и $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathrm{S}$ выполняются условия $\delta(\mathrm{x}, \mathrm{st}) = \delta(\delta(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \mathrm{t})$, $\lambda(\mathrm{x}, \mathrm{st}) = \lambda(\delta(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \mathrm{t})$.
- Гиперграфом называется система вида $\mathrm{H} = (\mathrm{X}, \mathrm{L})$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство некоторых подмножеств множества X, называемых ребрами гиперграфа.

# Универсальный гиперграфический автомат

Важный пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система $\mathrm{Atm}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2) = (\mathrm{H}_1, \mathrm{S}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2), \mathrm{H}_2, \delta', \lambda')$, где $\mathrm{S}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ – полугруппа $\mathrm{End}\,\mathrm{H}_1 \times \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ с бинарной операцией, определямой по правилу: $(\varphi, \psi)(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \mathrm{End}\,\mathrm{H}_1 \times \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$.

**Теорема**

Для любого гиперграфического автомата $\mathrm{A} = (\mathrm{H}_1, \mathrm{S}, \mathrm{H}_2, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_{\mathrm{X}_1}, \pi, \Delta_{\mathrm{Y}_1})$ является гомоморфизмом $\mathrm{A}$ в $\mathrm{Atm}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$.

# Эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами

- Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

# Эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами

- Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.
- Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре. То есть в таком гиперграфе каждое ребро однозначно определяется любыми своими p вершинами.

# Пример 1

На рисунке изображен гиперграф $H = (X, L)$ с множеством вершин $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множеством ребер $L = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{5, 7, 8\}\}$, который является эффективным гиперграфом с 2-определимыми ребрами.

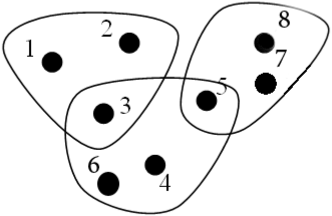


Рис.: Гиперграф H

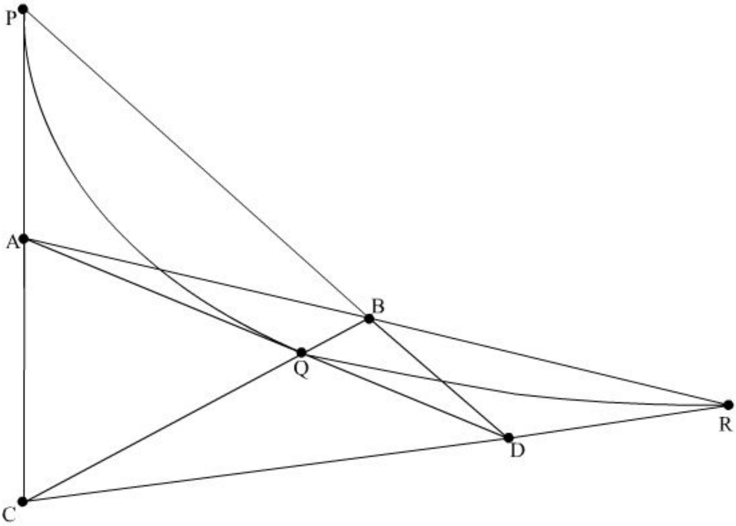


Рис.: Проективная плоскость, состоящая из семи точек

# Гиперграф

С алгебраической точки зрения эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами $H = (X, L)$ представляет собой двухсортную алгебраическую систему $H = (X, L, \rho)$ с двумя базисными множествами $X, L$ и бинарным отношением $\rho \subset X \times L$, которое для элементов $x \in X, l \in L$ определяется по формуле

$$(x, l) \in \rho \iff x \in l$$

и удовлетворяет условиям:

$$1) \quad (\forall x \in X)\,(\exists l \in L)\,((x, l) \in \rho),$$

$$2) \quad (\forall l \in L)\,(\exists x_1, x_2, ..., x_{p+1} \in X)(\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq p+1} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq p+1} (x_i, l) \in \rho),$$

$$3)(\forall x_1, x_2, ..., x_p \in X)(\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq p} x_i \neq x_j \Rightarrow$$

$$(\forall l, r)(\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (x_i, l) \in \rho \wedge (x_i, r) \in \rho \Rightarrow r = l)).$$

# Гиперграфический автомат

- Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется гиперграфическим автоматом, если множество состояний $X$ и множество выходных символов $Y$ наделены такими структурами гиперграфов $H_1 = (X, L_X)$ и $H_2 = (Y, L_Y)$ соответственно, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \longrightarrow X$ является эндоморфизмом гиперграфа $H_1$ и отображение $\lambda_s : X \longrightarrow Y$ – гомоморфизмом гиперграфа $H_1$ в гиперграф $H_2$. Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_1, S, H_2, \delta, \lambda)$.
- Входной сигнал $a \in S$ автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется автономным, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т.е. найдутся такое состояние автомата, обозначаемое $a_1$, и такой выходной сигнал автомата, обозначаемый $a_2$, что $\delta(x, a) = a_1$, $\lambda(x, a) = a_2$ для всех состояний автомата $x \in X$.

Далее рассматривается универсальный гиперграфический автомат $\mathrm{A} = \mathrm{Atm}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $\mathrm{H}_1 = (\mathrm{X}_1, \mathrm{L}_1)$ и $\mathrm{H}_2 = (\mathrm{X}_2, \mathrm{L}_2)$. Для такого автомата естественно определяются следующие объекты в его полугруппе входных сгналов $\mathrm{S}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$:

Далее рассматривается универсальный гиперграфический автомат $A = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_1 = (X_1, L_1)$ и $H_2 = (X_2, L_2)$. Для такого автомата естественно определяются следующие объекты в его полугруппе входных сгналов $S(H_1, H_2)$:

1) множество $C$ всех автономных входных сигналов автомата $A$;

Далее рассматривается универсальный гиперграфический автомат $A = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_1 = (X_1, L_1)$ и $H_2 = (X_2, L_2)$. Для такого автомата естественно определяются следующие объекты в его полугруппе входных сгналов $S(H_1, H_2)$:

1) множество $C$ всех автономных входных сигналов автомата $A$;
2) бинарное отношение $\varepsilon_1$ на множестве $C$, которое состоит из таких упорядоченных пар $(a, b)$ автономных входных сигналов $a, b \in C$, действия которых одинаково преобразуют состояния автомата $A$, т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff a_1 = b_1$;

Далее рассматривается универсальный гиперграфический автомат $A = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_1 = (X_1, L_1)$ и $H_2 = (X_2, L_2)$. Для такого автомата естественно определяются следующие объекты в его полугруппе входных сгналов $S(H_1, H_2)$:

1) множество $C$ всех автономных входных сигналов автомата $A$;
2) бинарное отношение $\varepsilon_1$ на множестве $C$, которое состоит из таких упорядоченных пар $(a, b)$ автономных входных сигналов $a, b \in C$, действия которых одинаково преобразуют состояния автомата $A$, т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff a_1 = b_1$;
3) бинарное отношение $\varepsilon_2$ на множестве $C$, которое состоит из таких упорядоченных пар $(a, b)$ автономных входных сигналов $a, b \in C$, при действии которых автоматом $A$ выдаются одинаковые выходные сигналы, т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_2 \iff a_2 = b_2$;

4) бинарное отношение $\eta_i$ на множестве $C^p$, которое состоит из таких упорядоченных пар $(\alpha, \beta)$ элементов $\alpha = (a^1, a^2, ..., a^p)$ и $\beta = (b^1, b^2, ..., b^p)$ с автономными входными сигналами $a^1, a^2, ..., a^p, b^1, b^2, ..., b^p \in C$, при действии которых для каждого $i = 1, 2$ состояния автомата A отображаются в ограниченное множество $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p, b_i^1, b_i^2, ..., b_i^p\}$ гиперграфа $H_i$, т.е. по определению

$$(\alpha, \beta) \in \eta_i \iff \{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p, b_i^1, b_i^2, ..., b_i^p\} \text{ – ограниченное}$$

множество в гиперграфе $H_i$ $(i = 1, 2)$.

4) бинарное отношение $\eta_i$ на множестве $C^p$, которое состоит из таких упорядоченных пар $(\alpha, \beta)$ элементов $\alpha = (a^1, a^2, ..., a^p)$ и $\beta = (b^1, b^2, ..., b^p)$ с автономными входными сигналами $a^1, a^2, ..., a^p, b^1, b^2, ..., b^p \in C$, при действии которых для каждого $i = 1, 2$ состояния автомата A отображаются в ограниченное множество $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p, b_i^1, b_i^2, ..., b_i^p\}$ гиперграфа $H_i$, т.е. по определению

$$(\alpha, \beta) \in \eta_i \iff \{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p, b_i^1, b_i^2, ..., b_i^p\} \text{ – ограниченное}$$

множество в гиперграфе $H_i$ $(i = 1, 2)$.

5) $D_i, i = 1, 2$ – множество, состоящее из p-элементных упорядоченных наборов автономных входных сигналов $x^1, x^2, ..., x^p$ таких, что $x_i^k \neq x_i^j$ для всех $1 \leq k < j \leq p$ и множество $\{x_i^1, x_i^2, ..., x_i^p\}$ – ограниченное множество в гиперграфе $H_i$.

С помощью канонических отношений этого автомата $A = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ введем следующие понятия для полугруппы входных сигналов:

**1)**

для каждого $i = 1, 2$ определим двухсортную алгебраическую систему $\overline{H}_i = \left(\overline{X}_i, \overline{L}_i, \overline{\rho}_i\right)$ с базисными множествами $\overline{X}_i = C/\varepsilon_i$, $\overline{L}_i = D_i/\eta_i$ и бинарным отношением $\overline{\rho}_i \subset \overline{X}_i \times \overline{L}_i$, которое для элементов $a, a^1, a^2, ..., a^p \in C$, $a^k \not\equiv a^j(\varepsilon_i), 1 \le k < j \le p$, задается по формуле:
$\left(\varepsilon_i(a), \eta_i(a^1, a^2, ..., a^p)\right) \in \overline{\rho}_i \iff$ множество $\{a_i, a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p\}$ – ограниченное множество в гиперграфе $H_i$;

**2)**

определим два отображения $\overline{\delta} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_1$, $\overline{\lambda} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_2$, которые для элементов $a \in C, s \in S$ задаются по формулам:

$$\overline{\delta}\,(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_1(a \cdot s), \quad \overline{\lambda}\,(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_2(a \cdot s).$$

# Основной результат

**Теорема**

Пусть $\mathrm{A} = \mathrm{Atm}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ – универсальный гиперграфический автомат для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $\mathrm{H}_1 = (\mathrm{X}_1, \mathrm{L}_1)$, $\mathrm{H}_2 = (\mathrm{X}_2, \mathrm{L}_2)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для каждого $\mathrm{i} = 1, 2$ гиперграф $\mathrm{H}_\mathrm{i}$ изоморфен алгебраической системе $\overline{\mathrm{H}}_\mathrm{i} = \left(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{i}, \overline{\mathrm{L}}_\mathrm{i}, \overline{\rho}_\mathrm{i}\right)$;
2) автомат $\mathrm{A} = \mathrm{Atm}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ изоморфен гиперграфическому автомату $\overline{\mathrm{A}} = \left(\overline{\mathrm{H}}_1, \mathrm{S}, \overline{\mathrm{H}}_2, \overline{\delta}, \overline{\lambda}\right)$ с гиперграфом состояний $\overline{\mathrm{H}}_1$, полугруппой входных сигналов $\mathrm{S} = \mathrm{Inp}(\mathrm{A})$, гиперграфом выходных сгналов $\overline{\mathrm{H}}_2$, функцией переходов $\overline{\delta} : \overline{\mathrm{X}}_1 \times \mathrm{S} \to \overline{\mathrm{X}}_1$ и выходной функцией $\overline{\lambda} : \overline{\mathrm{X}}_1 \times \mathrm{S} \to \overline{\mathrm{X}}_2$.

# Список литературы


- Bretto A. Hypergraph theory. An Introduction. – Cham. : Springer, 2013. — 133 p.
- Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A. On problem of concrete characterization of universal automata // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017. Vol. 38, No. 4. P. 664-669
- Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980. 416 с.
- Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами их входных сигналов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2016. N8. С. 67-69.
- Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов.– М.:Высшая школа, 1994. – 192 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!