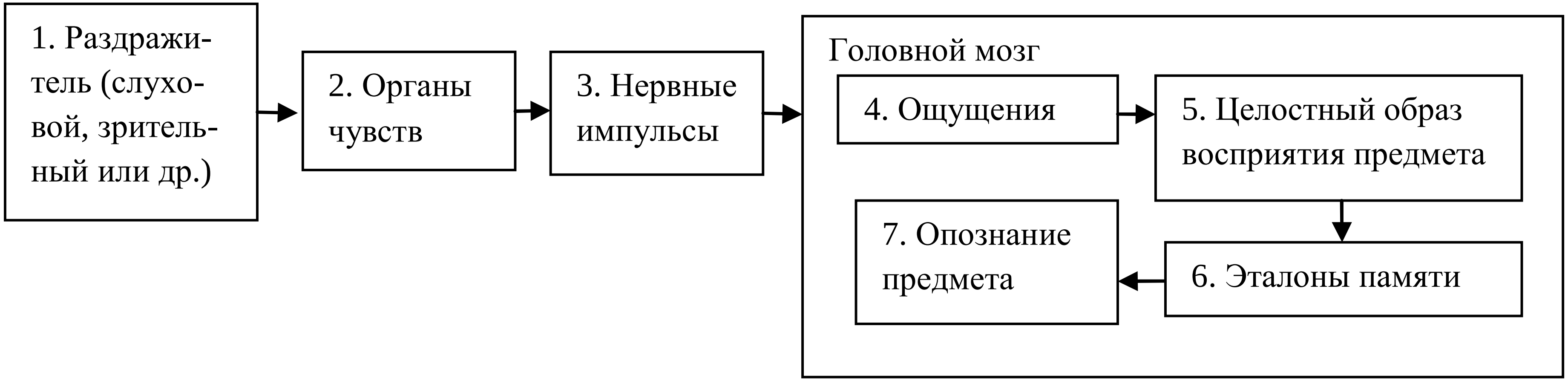
КОНЦЕПТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧЕ СОЗДАНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

В. Е. Новиков
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Процесс приема информации человеком



Техническая модель процесса приема информации

1. Формальный концептуальный анализ предметной базы данных

Формальный контекст это тройка $\mathrm{K} = (G, \{M_i\}_{i=1\ldots n}, \rho)$, где G — конечное *множество объектов*, $|G| \geq 2$, $\{M_i\}$ — семейство конечных *множеств атрибутов*,

$|M_i| \geq 2$, $\rho \subseteq G \times M_1 \times \ldots \times M_n$ — некоторое $(n+1)$-арное отношение.

Концептом по системе атрибутов $\bar{j}_k$ *в контексте* K называется замкнутое подмножество $X \subseteq G$ объектов обладающих общностью значений по набору атрибутов $\bar{j}_k$. Замкнутое в том смысле, что объектов с этими же значениями указанного набора атрибутов, не вошедших в подмножество X, в контексте K нет.

Будем говорим, что контекст $\mathrm{K} = (G, (M_i), \rho)$ *однозначен относительно множества объектов*, или просто *однозначен*, если отношение ρ имеет F-зависимость $G \to M_{\bar{n}}$. В частности однозначный контекст моделируется любой реляционной базой данных, в которой множество объектов является одним из ключей этой базы.

Если $(g, m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \rho$, то говорим, что объект g по атрибуту 1 имеет значение m_1, по атрибуту 2 — значение m_2, по системе атрибутов (1, 2) — значение (m_1, m_2), и т.д. Если любой объект по каждому атрибуту имеет точно одно значение, то такой контекст называем *однозначным*. Таким образом, однозначный контекст определяет отображения ρ_i: $G \to M_i$ по правилу $\rho_i(g) = m_i$.

1. Формальный концептуальный анализ предметной базы данных

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$ — *однозначный контекст. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *множество концептов контекста* $\mathbb{K}$ *образует полную решётку* $L(\mathbb{K})$ *относительно теоретико-множественного включения*;
2) *множество собственных концептов по любому* $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ *образует разбиение множества* G, *которое обозначаем* $G/_{\bar{j}_k}$;
3) *если* $\bar{l}_q \subseteq \bar{j}_p$ $(\bar{j}_p, \bar{l}_q \subseteq \bar{n})$, *то* $G/_{\bar{j}_p} \leq G/_{\bar{l}_q}$;
4) *если концепт* X *в решётке концептов не является атомом, то* X *покрывает не менее двух концептов контекста* $\mathbb{K}$;
5) *высота решётки концептов* $h(L(\mathbb{K})) \leq \min\{n+2, |G|+1\}$, *а её ширина* $w(L(\mathbb{K})) \leq |G|$.

1. Формальный концептуальный анализ предметной базы данных

Пусть после первоначального восприятия окружающих объектов получена предметная база данных, которая отражена в таблице 1. В результате имеем контекст $\mathbb{K} = (G, \{ M_i \}_{i = 1,2,3,4}, \rho)$, где $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$— множество объектов, M_1, M_2, M_3, M_4 — это какие-то атрибуты этих объектов, $\rho \subseteq G \times M_1 \times \ldots \times M_n$— отношение на этих множествах, которое задано таблицей 1. Например, если M_1 — «масса», то $a_1, a_2 \in M_1$ являются значением массы, т.е. объект g_1 имеет массу a_1, объект g_3 имеет массу a_2. Если M_2 — «цвет», то объект g_2 имеет цвет b_1, объект g_4 имеет цвет b_2, и т.д.

Таблица 1

G	M_1	M_2	M_3	M_4
g_1	a_1	b_1	c_1	d_1
g_2	a_1	b_1	c_1	d_1
g_3	a_2	b_2	c_2	d_2
g_4	a_2	b_2	c_2	d_2

Концептом данного контекста, учитывая вышеизложенное определение, является любое подмножество множества G, обладающее некоторой общностью значений какого-либо набора атрибутов, включая два универсальных концепта, всё множество G и пустое множество $\varnothing$.

1. Формальный концептуальный анализ предметной базы данных

Не трудно заметить, что в контексте $\mathbb{K}$ (см. таблица 1) выделяются два собственных концепта, $\{g_1, g_2\}$ и $\{g_3, g_4\}$, так как их объекты имеют общность значений в данном примере по любому набору атрибутов. В результате имеем решётку концептов контекста $\mathbb{K}$, изображённую на рис. 1.

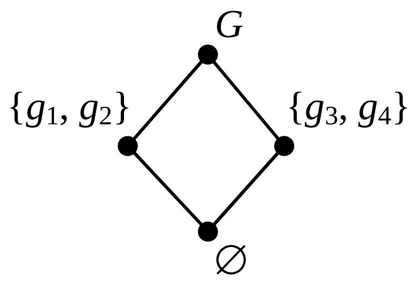


Рис. 1

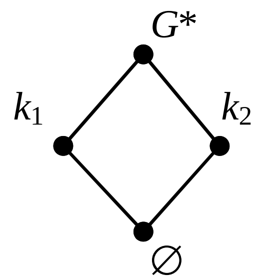


Рис. 2

Осуществим процесс минимизации. В результате получим эталонную базу данных, представленную в таблице 2, и она соответствует формальному контексту $\mathbb{K}^* = (G^*, M^*, \rho^*)$. Её решётка концептов изображена на рис. 2, и видно, что она изоморфна решётке на рис. 1. При этом значения a_1, b_1, c_1, d_1 соответствующих атрибутов отображаются в значение m_1 атрибута M^*, и a_1, b_1, c_1, d_1 — в m_2. В контексте $\mathbb{K}^*$ кроме G^* и $\varnothing$ существуют ещё два концепта k_1 и k_2.

Таблица 2

G^*	M^*
k_1	m_1
k_2	m_2

2. Формальный концептуальный анализ эталонной базы данных

Пусть атрибут M_i является линейно упорядоченным множеством с порядком $\leq_i$. На множестве этого атрибута построим функцию плотности F_i по следующему правилу. Пусть $a \in M_i$, обозначим $G_a = \{g \in G \mid \rho_i(g) \leq_i a\}$, тогда $F_i(a) = |G_a|$. Ясно, что эта функция всюду неубывающая и ограниченная, с минимальным значением 0 и максимальным значением $|G|$. Её график имеет вид, показанный на рис. 3.

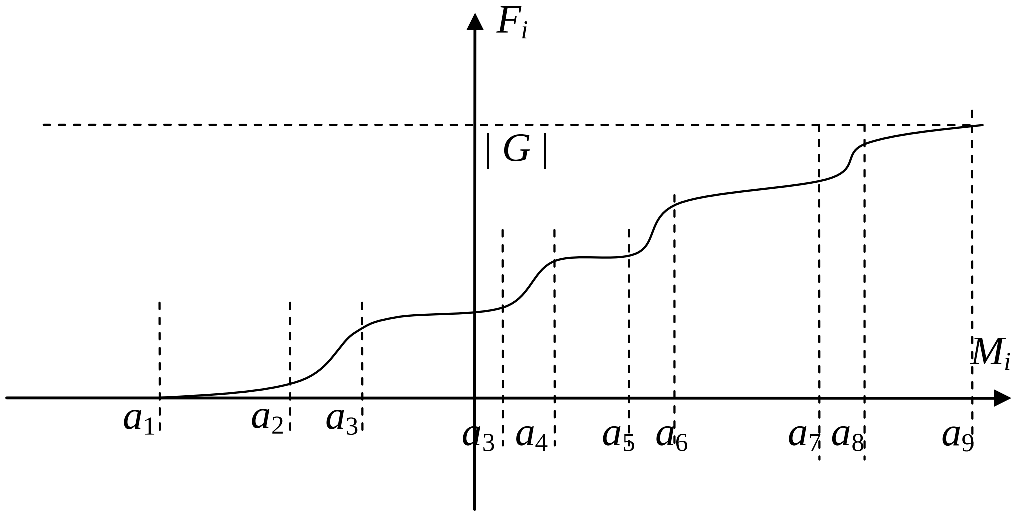


Рис. 3

Строим изотонное отображение φ_i: $M_i \to A_i$, полагая: $[a_1, a_2) \to b_1$, $[a_2, a_3) \to b_2$, $[a_3, a_4) \to b_3$, $[a_4, a_5) \to b_4$, $[a_5, a_6) \to b_5$, $[a_6, a_7) \to b_6$, $[a_7, a_8) \to b_7$, $[a_8, a_9] \to b_8$. $A_i = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ с порядком $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8$.

3. Распознавание образа

Если уже построена эталонная база данных и соответствующая ей решётка концептов, то каждому концепту k присвоим кодовое имя $N(k)$. Это можно сделать произвольным кодированием. А можно закодировать так, чтобы его кодовое имя отражало место этого концепта в концептуальной решётке и отражало в себе всю логику связей между концептами.

Далее каждому кодовому имени $N(k)$ поставим в соответствие имя этого концепта на каком-либо естественном языке, например, $R(N(k))$ — на русском, $A(N(k))$ — на английском, $F(N(k))$ — на французском, $G(N(k))$ — на немецком, и так далее.

Распознавание вновь воспринимаемого объекта осуществляется по композиции изотонных отображений и отображений полученных при минимизации предметной базы данных. Поэтому в памяти необходимо держать изотонные отображения φ_i и отображения, полученные при минимизации предметной базы данных.

Воспринимает объект g $\rightarrow$ значения его атрибутов $\rho_i(g) \rightarrow$ значение его атрибутов после минимизации контекста m^*_i $\rightarrow$ значение при изотонном отображении $\varphi_i(m^*_i) \rightarrow$ концепт эталонной базы данных $\rho^{-1}_i(\varphi_i(m^*_i)) = k$.

А ответ мы можем заказать на своём родном языке по вложенным словарям, например, на русском: $R(N(k))$ — на русском.

4. Формальный концептуальный анализ эталонной базы данных (дополнение)

Пусть $\mathrm{K} = (G, (M_i), \rho)$ уже обновлённый контекст после действия соответствующих изотонных отображений. Он по-прежнему будет однозначным.

$L_p(\mathrm{K}) = \{P_\mathrm{G},\ P_{\bar{j}_k} \mid \bar{j}_k \subseteq \bar{n}\}$, где P_G — это разбиение множества G, состоящее из одного блока G. По утверждению 1 теоремы 1 получаем, что любой собственный концепт по любому $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ является одним из блоков разбиения $P_{\bar{j}_k}$ множества G. Пусть $L_p(G)$ — решётка разбиений множества G.

Теорема 2. *Для любого однозначного контекста* $\mathrm{K} = (G, (M_i), \rho)$ *множество* $L_p(\mathrm{K})$ *является подрешёткой решётки разбиений* $L_p(G)$. *И для любой подрешётки* $L \subseteq L_p(G)$, *содержащей* P_G, *существует однозначный контекст* $\mathrm{K}(L)$ *такой, что* $L = L_p(\mathrm{K}(L))$.

Теорема 3. *Для любого однозначного контекста* $\mathrm{K} = (G, (M_i), \rho)$ *и для любых* $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ *существует В-зависимость* $M_{\bar{l}_q} \to M_{\bar{j}_k}$ *тогда и только тогда, когда* $P_{\bar{l}_q} = P_{\bar{j}_k}$.

4. Формальный концептуальный анализ эталонной базы данных (дополнение)

Рассмотрим случай, когда $|G| = 3$, $G = \{g_1, g_2, g_3\}$. Соответствующие всевозможные решётки разбиений множества $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, где $P_G = \{G\}$, $P_1 = \{\{g_1\}, \{g_2, g_3\}\}$, $P_2 = \{\{g_2\}, \{g_1, g_3\}\}$, $P_3 = \{\{g_3\}, \{g_1, g_2\}\}$, $P_0 = \{\{g_1\}, \{g_2\}, \{g_3\}\}$.

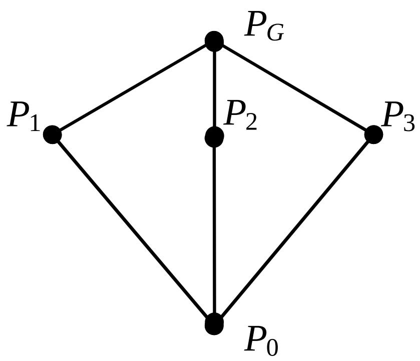


Рис. 4

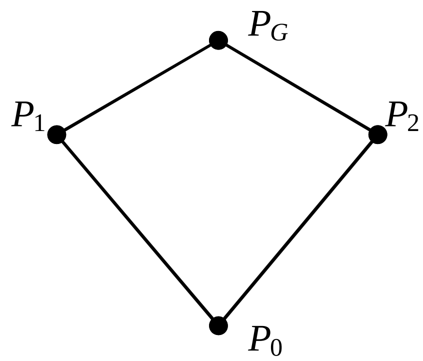


Рис. 5

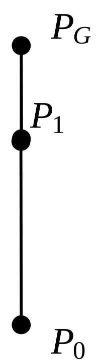


Рис. 6

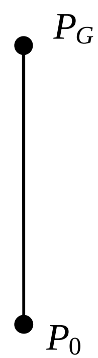


Рис. 7

4. Формальный концептуальный анализ эталонной базы данных (дополнение)

Отсюда получаем им соответствующие решётки концетов.

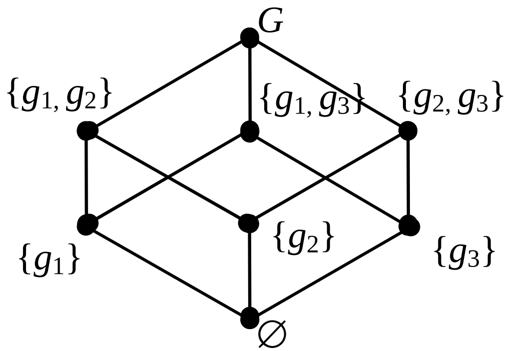


Рис. 7

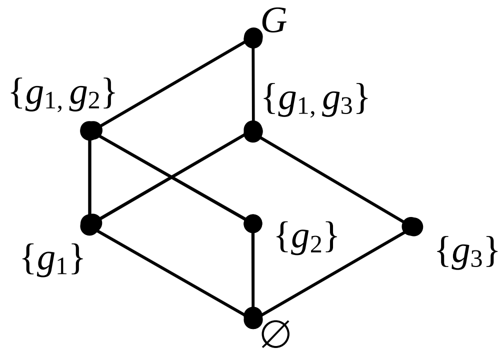


Рис. 9

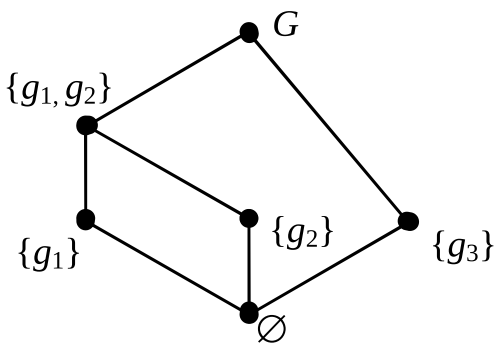


Рис. 10

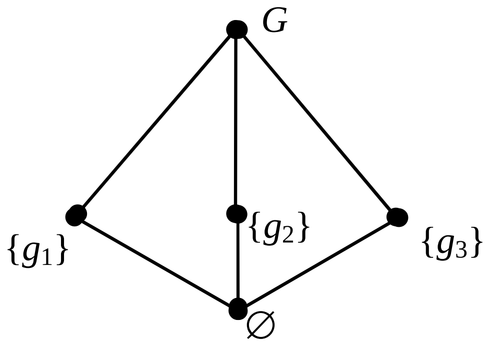


Рис. 11

5. Формальный концептуальный анализ отдельно взятого концепта (дополнение)

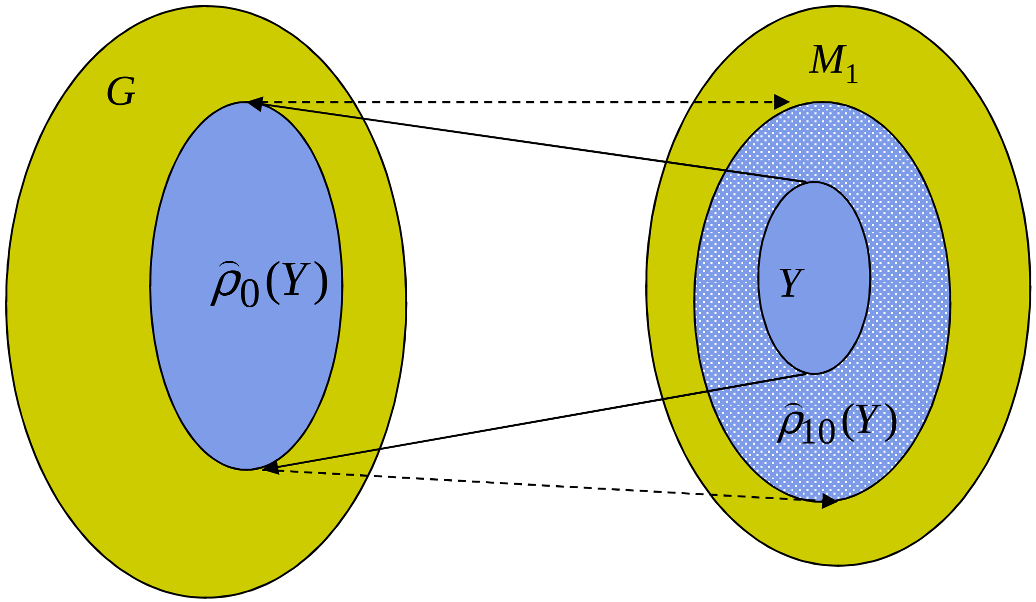
Формальный концепт контекста $\mathbb{K} = (G, M_1, \rho)$ определяется как множеств объектов $A \subseteq G$ с общим множеством атрибутов $B \subseteq M_1$, и все атрибуты B присущи каждому объекту только из множества A.

Формальный концепт можно определить через дуальный срез: $\widehat{\rho}_1(A) = \bigcap_{x \in A} \rho\langle x \rangle$ и $\widehat{\rho}_0(B) = \bigcap_{y \in B} \rho\langle y \rangle$.

Для дуального среза справедливо включение:

$$X \subseteq \widehat{\rho}_{01}(X). \qquad (1)$$

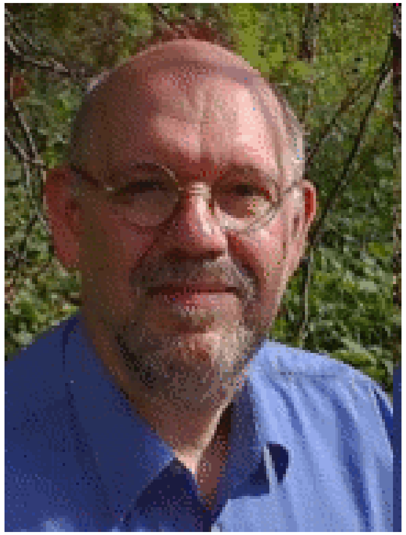
Тогда формальный концепт формального контекста $\mathbb{K} = (G, M_1, \rho)$ — это пара (A, B), для которой включение (1) достигает равенства, т.е. когда $A = \widehat{\rho}_{01}(A)$.



Формальный концептуальный анализ

Пусть задан *формальный контекст* $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$, где G —*множество объектов*, (M_i) — семейство *множеств атрибутов* с множеством индексов $1 \le i \le n$, $\rho \subseteq G \times M_1 \times \ldots \times M_n$ — некоторое $(n+1)$-арное отношение. При $n = 1$ получаем контекст $\mathbb{K} = (G, M_1, \rho)$, где $\rho \subseteq G \times M_1$ бинарное отношение. Этот случай формального контекста был введён в первой половине 80-х годов прошлого столетия представителями немецкой математической школы Вилле Р., Гантером Б., Бурмейстером П., Стумме Г. и др.

Prof. Rudolf Wille



Prof. Bernhard Ganter

Prof. Peter Burmeister

Prof. Gerd Stumme

Спасибо за внимание!