VIII Международная научная конференция
«Компьютерные науки и информационные технологии»
ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»

О количестве циклических состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов

ЖАРКОВА АНАСТАСИЯ ВЛАДИМИРОВНА
К.Ф.-М.Н., ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ И КРИПТОГРАФИИ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА (Г. САРАТОВ)

Саратов
02 июля 2018 год

Введение

- конечные динамические системы двоичных векторов [7, 5];
- SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов [6].

---

5 Салий В.Н. Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23-26.

7 Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems // Annals of Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425-439.

6 Barbosa V.C. An atlas of edge-reversal dynamics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.

Основные определения

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара $G=(V,\beta)$, где V - конечное непустое множество (*вершины* орграфа), а $\beta \subseteq V \times V$ - отношение на множестве V (пара $(u,v) \subseteq \beta$ называется *дугой* орграфа с *началом* u и *концом* v).

Неориентированным графом (или, для краткости, *графом*) называется пара $G=(V,\beta)$, где β - симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V.

Орграф $G=(V,\beta)$ называется *направленным* графом (или *диграфом*), если отношение β антисимметрично.

Пусть $G=(V,\beta)$ - некоторый орграф, $v \in V$ - одна из его вершин. *Степенью исхода* вершины $v \in V$ называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $G=(V,\beta)$, имеющих своим началом v; *степень захода* вершины v - это количество $d^-(v)$ дуг, имеющих v своим концом.

Граф $G=(V,\beta)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается символом K_n.

Простой циклический путь в орграфе называется *контуром*.

Турниром называется полный направленный граф. [1]

---

1 Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. м.: Наука. Физматлит, 1997. 368 с.

Основные определения

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S - конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями* системы, $\delta{:}S\to S$ - отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией* системы.

Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s\in S$ в вершину $\delta(s)$.

Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями.

Контуры в свою очередь называются предельными циклами, или *аттракторами*.

Циклическое состояние – состояние, принадлежащее аттрактору.

Описание динамической системы

Пусть дан полный граф $G=(V,\beta)$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $n>1$, $m=(n(n-1))/2$, где m - число рёбер.

Придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф (турнир) $G=(V,\beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично.

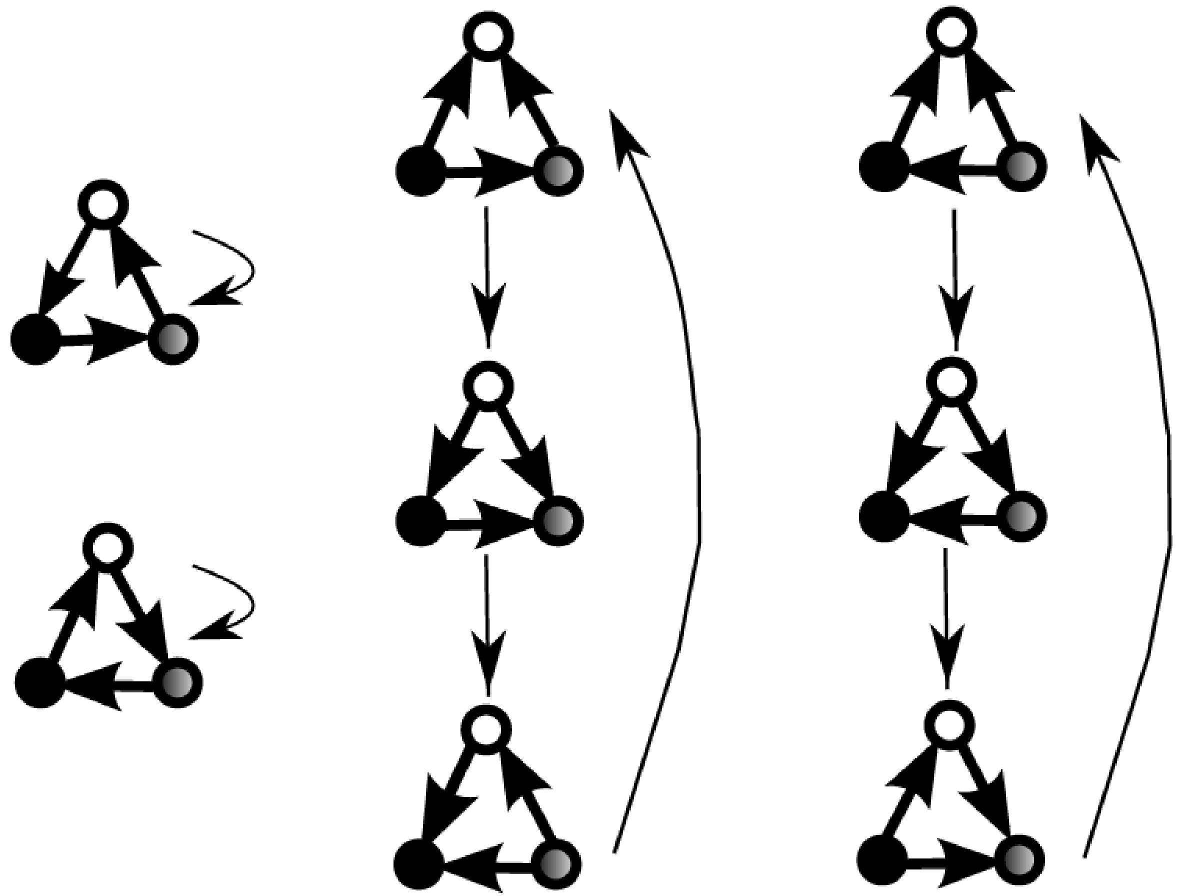
Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α, которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки (вершины с нулевой степенью исхода), а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф $\alpha(G)$.

Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту данной конечной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Описание динамической системы

Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α), $n>1$, где через Γ_{K_n} обозначим множество всех возможных ориентаций данного полного графа K_n, $|\Gamma_{K_n}|=2^m$, а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $G\in\Gamma_{K_n}$, то его динамическим образом $\alpha(G)$ является орграф, полученный из G одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между G и $\alpha(G)$ нет.

Карта конечной динамической системы (Γ_{K3}, a)



Замечание

В книге [6] рассматривается конечная динамическая система (Ω,a), где Ω - множество всех бесконтурных ориентаций данного связного графа, и замечается, что для полного графа существует n! бесконтурных ориентаций, где n! - количество перестановок его вершин, при этом все состояния данной системы являются циклическими.

---

6 Barbosa V.C. An atlas of edge-reversal dynamics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.

Количество циклических состояний в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α)

Теорема 1. *В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n>1$, количество принадлежащих аттракторам (циклических) состояний равно*

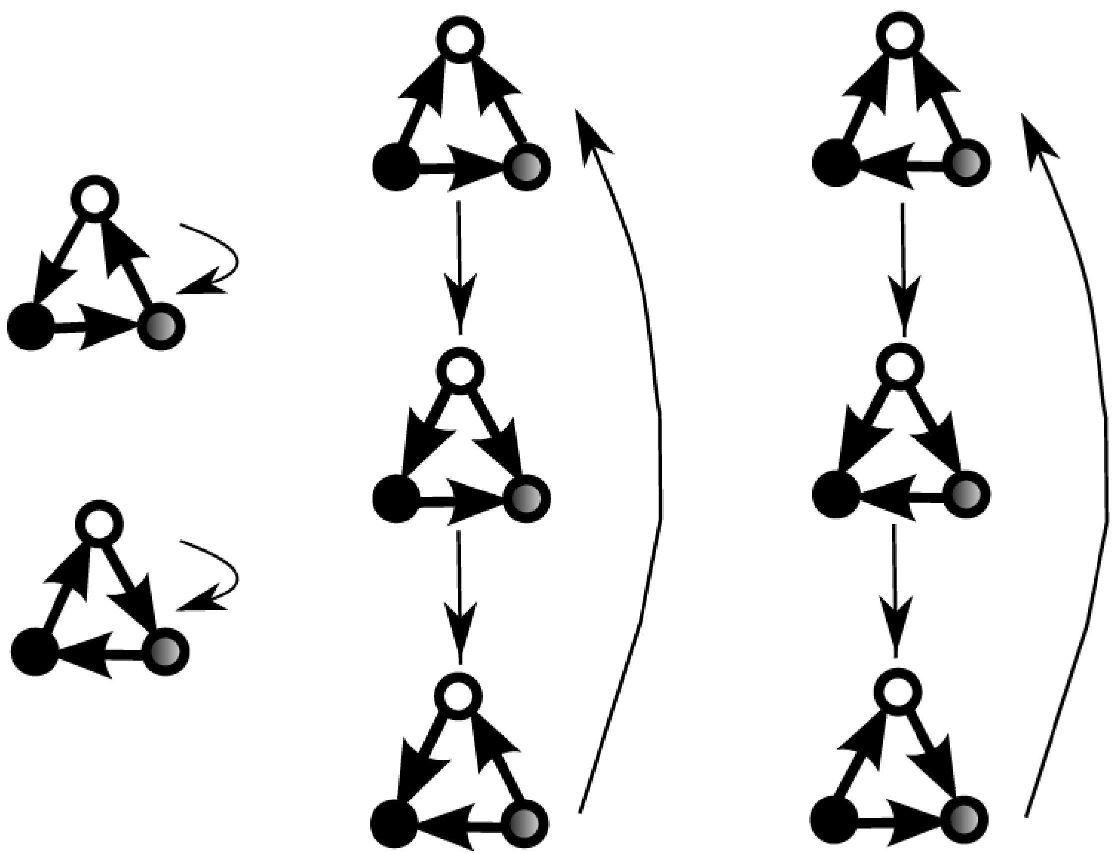
$$2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot (2^{n-1} - n) + n!.$$

Количество состояний, не являющихся циклическими, в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α)

Теорема 2. *В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n>1$, количество не принадлежащих аттракторам (не являющихся циклическими) состояний равно*

$$n \cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} - n!.$$

Конечная динамическая система (Γ_{K3}, a)



По теореме 1:

$$2^1 \cdot (2^2 - 3) + 3! = 8$$

По теореме 2:

$$3 \cdot 2^1 - 3! = 0$$

Количество циклических состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α), $1<n<21$

n	$\lvert\Gamma_{K_n}\rvert = 2^m$	Количество циклических состояний	%
2	2	2	100
3	8	8	100
4	64	56	87,5
5	1024	824	$\approx 80,469$
6	32768	27344	$\approx 83,447$
7	2097152	1872816	$\approx 89,303$
8	268435456	251698560	$\approx 93,765$
9	68719476736	66303920512	$\approx 96,485$
10	35184372088832	34497180950272	$\approx 98,047$
11	36028797018963968	35641768965903616	$\approx 98,926$
12	2^{66}	73354630731089640448	$\approx 99,414$
13	2^{78}	301272224211830624013312	$\approx 99,683$
14	2^{91}	2471648838202109434865068032	$\approx 99,829$
15	2^{105}	40527681006124779440955203213312	$\approx 99,908$
16	2^{120}	1328578958677599019450261671029080064	$\approx 99,951$
17	2^{136}	87089689055831903076784535138195324370944	$\approx 99,974$
18	2^{153}	11416413520500907364026648525411317876849311744	$\approx 99,986$
19	2^{171}	2992938411604397870579225677935591422639720079360000	$\approx 99,993$
20	2^{190}	1569215570739605117175417732871168545075536656127224971264	$\approx 99,996$

Количество состояний, не являющихся циклическими, в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α), $1<n<21$

n	$\lvert\Gamma_{K_n}\rvert = 2^m$	Количество состояний, не являющихся циклическими	%
2	2	0	0
3	8	0	0
4	64	8	12,5
5	1024	200	$\approx 19,531$
6	32768	5424	$\approx 16,553$
7	2097152	224336	$\approx 10,697$
8	268435456	16736896	$\approx 6,235$
9	68719476736	2415556224	$\approx 3,515$
10	35184372088832	687191138560	$\approx 1,953$
11	36028797018963968	387028053060352	$\approx 1,074$
12	73786976294838206464	432345563748566016	$\approx 0,586$
13	302231454903657293676544	959230691826669663232	$\approx 0,317$
14	2^{91}	4231240368651114933180416	$\approx 0,171$
15	2^{105}	37138201178561406939299358720	$\approx 0,092$
16	2^{120}	649037107316853453545389251264512	$\approx 0,049$
17	2^{136}	22596875928343569839364364337337761792	$\approx 0,026$
18	2^{153}	1568021146771684439639230184643214212661248	$\approx 0,014$
19	2^{171}	216941649291305901920859467356201615629768654848	$\approx 0,007$
20	2^{190}	59863107065073783529622930748058950052204988783656960	$\approx 0,004$

Список литературы

1. *Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука. Физматлит, 1997. 368 с.*
2. *Власова А.В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
3. *Жаркова А.В.* О циклических состояниях в конечных динамических системах ориентаций полных графов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф., Саратов: Издат. центр "Наука", 2016. С. 161-163.
4. *Жаркова А.В.* Количество аттракторов в динамических системах, ассоциированных с циклами // Матем. Заметки. 2014. Т. 95, выпуск 4. С. 529-537.
5. *Салий В.Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23-26.
6. *Barbosa V.C.* An atlas of edge-reversal dynamics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
7. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Annals of Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425-439.

Спасибо за внимание!