Локализованные нелинейные волны в двумерной решетке активных частиц

Сергеев К.С.

Четвериков А.П.

VIII Международная научная конференция
"КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"
памяти А.М.Богомолова

Саратов, 2018

Цели и задачи

- Систематизировать основные стационарные моды и метастабильные локализованные состояния активной решетки

- Определить интервалы значений параметров решетки, при которых реализуются те или иные режимы

Модель решетки активных частиц

Уравнение динамики i-той частицы в безразмерном виде:

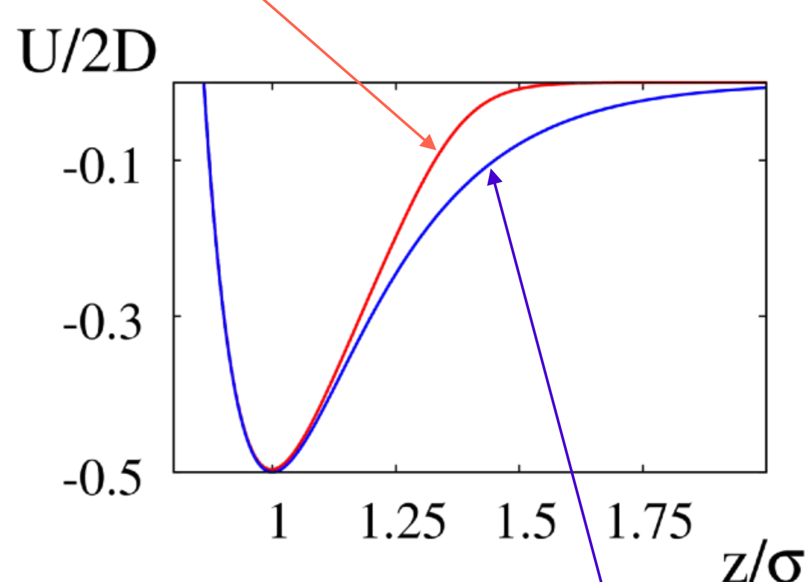
$$\ddot{\vec{q}}_i - \boxed{\mu\left(1 - \frac{|\dot{\vec{q}}_i|^2}{v_0^2}\right)\dot{\vec{q}}_i} = \sum_{|\vec{q}_i^k|<R} \boxed{\frac{\vec{q}_i^k}{|\vec{q}_i^k|}\left[\left(e^{b\sigma-|\vec{q}_i^k|} - e^{2(b\sigma-|\vec{q}_i^k|)}\right)\cdot\frac{1}{1+e^{\frac{|\vec{q}_i^k|/b-d}{2\nu}}} - \frac{1}{2b}\,\frac{e^{2(b\sigma-|\vec{q}_i^k|)}-2e^{b\sigma-|\vec{q}_i^k|}}{2\nu e^{\frac{|\vec{q}_i^k|/b-d}{2\nu}}}\cdot e^{\frac{|\vec{q}_i^k|/b-d}{2\nu}}\right]}$$

Трение Рэлея:

$$\boxed{\gamma(\vec{v}_i) = \tilde{\mu}\left(1 - \frac{|\vec{v}_i|^2}{v_0^2}\right)}$$

Модифицированный потенциал Морзе:

$$\boxed{U(z) = D\left(e^{-2b(z-\sigma)} - 2e^{-b(z-\sigma)}\right)\frac{1}{1+e^{(z-d)/2\nu}}}$$



$$\boxed{U(z) = D\left(e^{-2b(z-\sigma)} - 2e^{-b(z-\sigma)}\right)}$$

Традиционная форма потенциала Морзе

<u>Используемые обозначения:</u>

$\vec{q}_i = b\vec{r}_i$ — безразмерная координата

$\dot{\vec{q}}_i = \frac{\omega_M}{b}\vec{v}_i$ — безразмерная скорость

$\mu = \tilde{\mu}\omega_M/b$ — коэффициент отрицательного трения

$\omega_M = \sqrt{2Db^2/m}$ — частота линейных колебаний частицы

за счет связи

$b\sigma$ — жесткость потенциала

$\vec{q}_i^k/|\vec{q}_i^k|$ — единичный вектор, указывающий направление от i-той частицы к k-той

Модель решетки активных частиц

Уравнение динамики i-той частицы в безразмерном виде:

$$\ddot{\vec{q}}_i - \boxed{\mu\left(1 - \frac{|\dot{\vec{q}}_i|^2}{v_0^2}\right)\dot{\vec{q}}_i} = \sum_{|\vec{q}_i^k|<R} \boxed{\frac{\vec{q}_i^k}{|\vec{q}_i^k|}\left[\left(e^{b\sigma-|\vec{q}_i^k|} - e^{2(b\sigma-|\vec{q}_i^k|)}\right)\cdot\frac{1}{1+e^{\frac{|\vec{q}_i^k|/b-d}{2\nu}}} - \frac{1}{2b}\,\frac{e^{2(b\sigma-|\vec{q}_i^k|)} - 2e^{b\sigma-|\vec{q}_i^k|}}{2\nu e^{\frac{|\vec{q}_i^k|/b-d}{2\nu}}}\cdot e^{\frac{|\vec{q}_i^k|/b-d}{2\nu}}\right]}$$

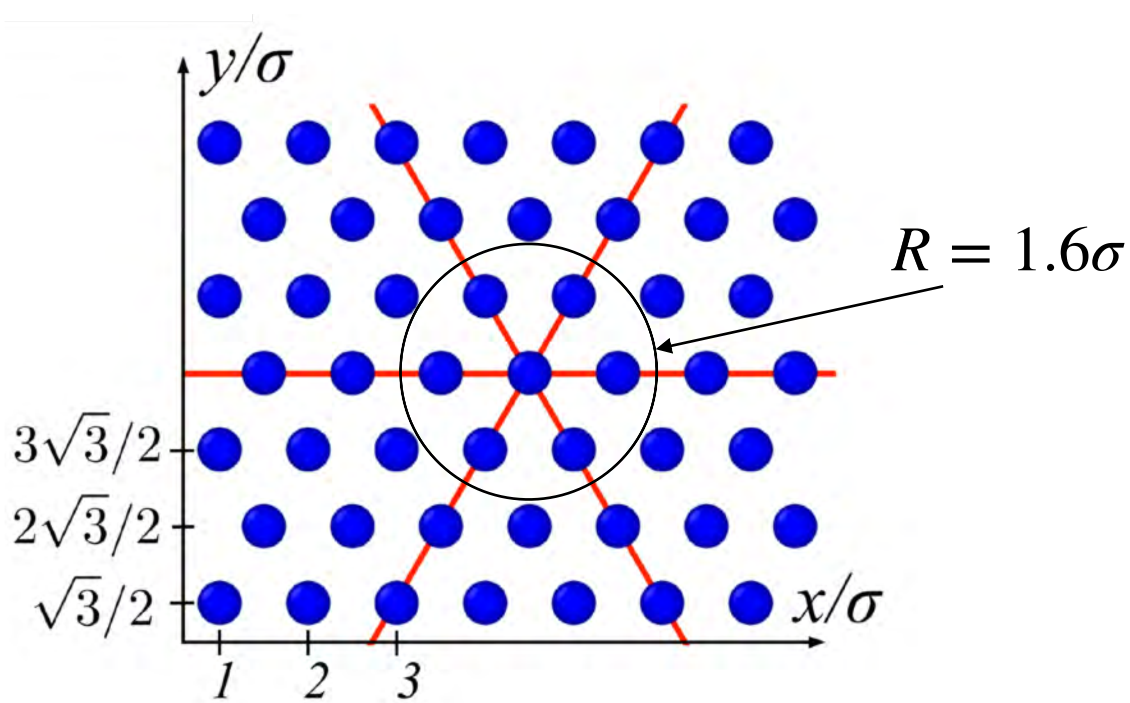
Трение Рэлея:

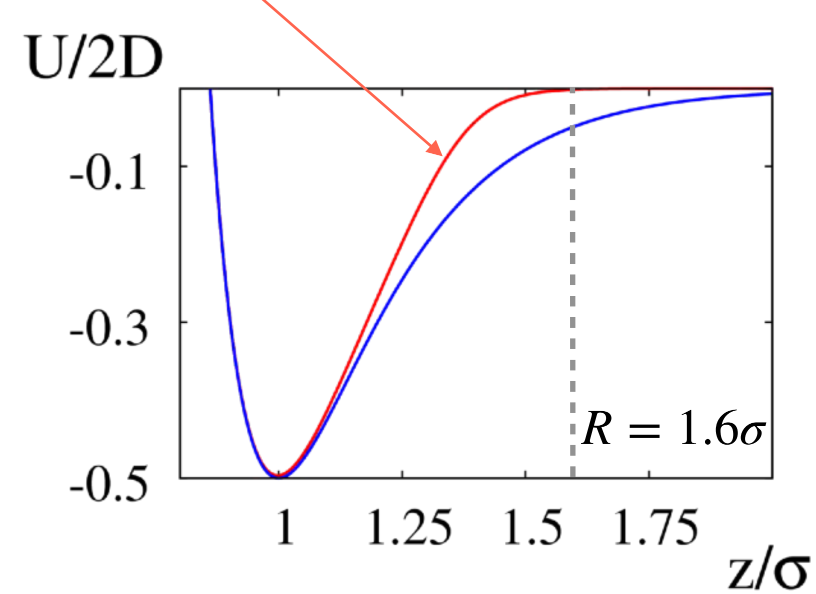
$$\boxed{\gamma(\vec{v}_i) = \tilde{\mu}\left(1 - \frac{|\vec{v}_i|^2}{v_0^2}\right)}$$

Модифицированный потенциал Морзе:

$$\boxed{U(z) = D\left(e^{-2b(z-\sigma)} - 2e^{-b(z-\sigma)}\right)\frac{1}{1+e^{(z-d)/2\nu}}}$$

Решетка с треугольной симметрией





Параметры потенциала

$b\sigma = 5$

$d = 1.35\sigma$

$\nu = 0.035\sigma$

Стационарные моды треугольной решетки

Трансляционная мода — основное стационарное состояние решетки, её аттрактор в пространстве скоростей

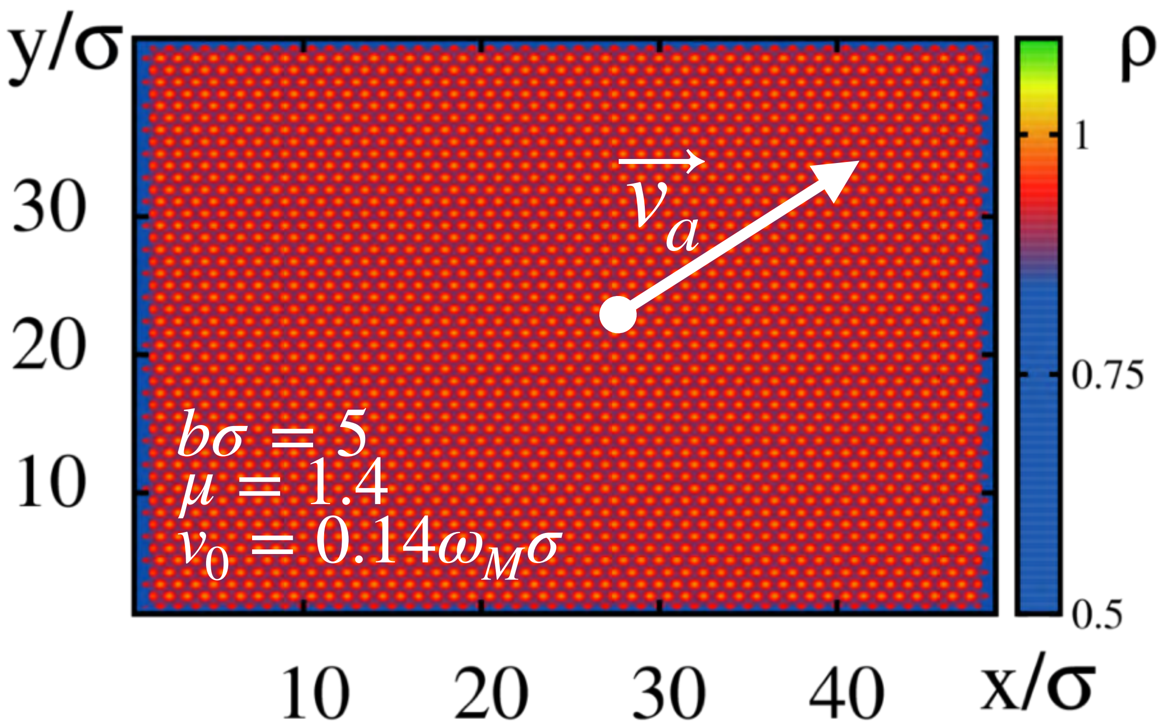
Гауссово распределение плотности частиц:

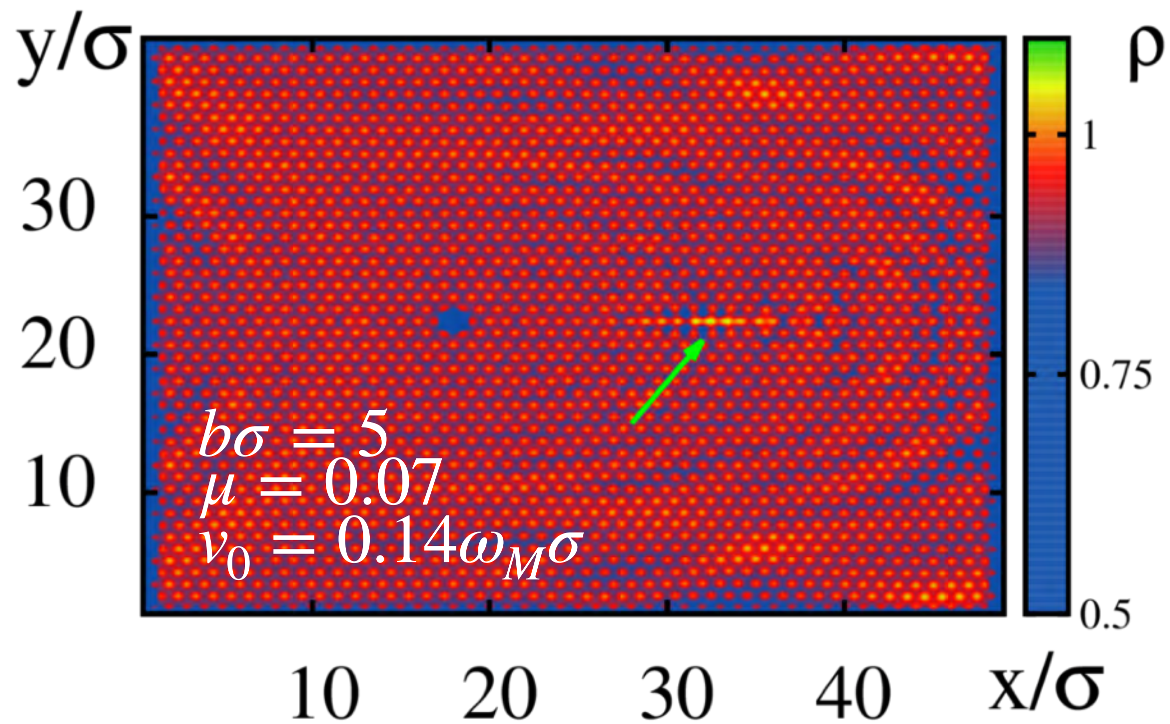
$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{|\vec{r}-\vec{r}_i|<1.6\sigma} exp(-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)^2}{2\lambda^2})$$

$\vec{v_a}$ — средняя по ансамблю скорость

$\vec{v_a}$ может быть ориентирована произвольно в зависимости от начальных условий

$$|\vec{v_a}| = v_0$$

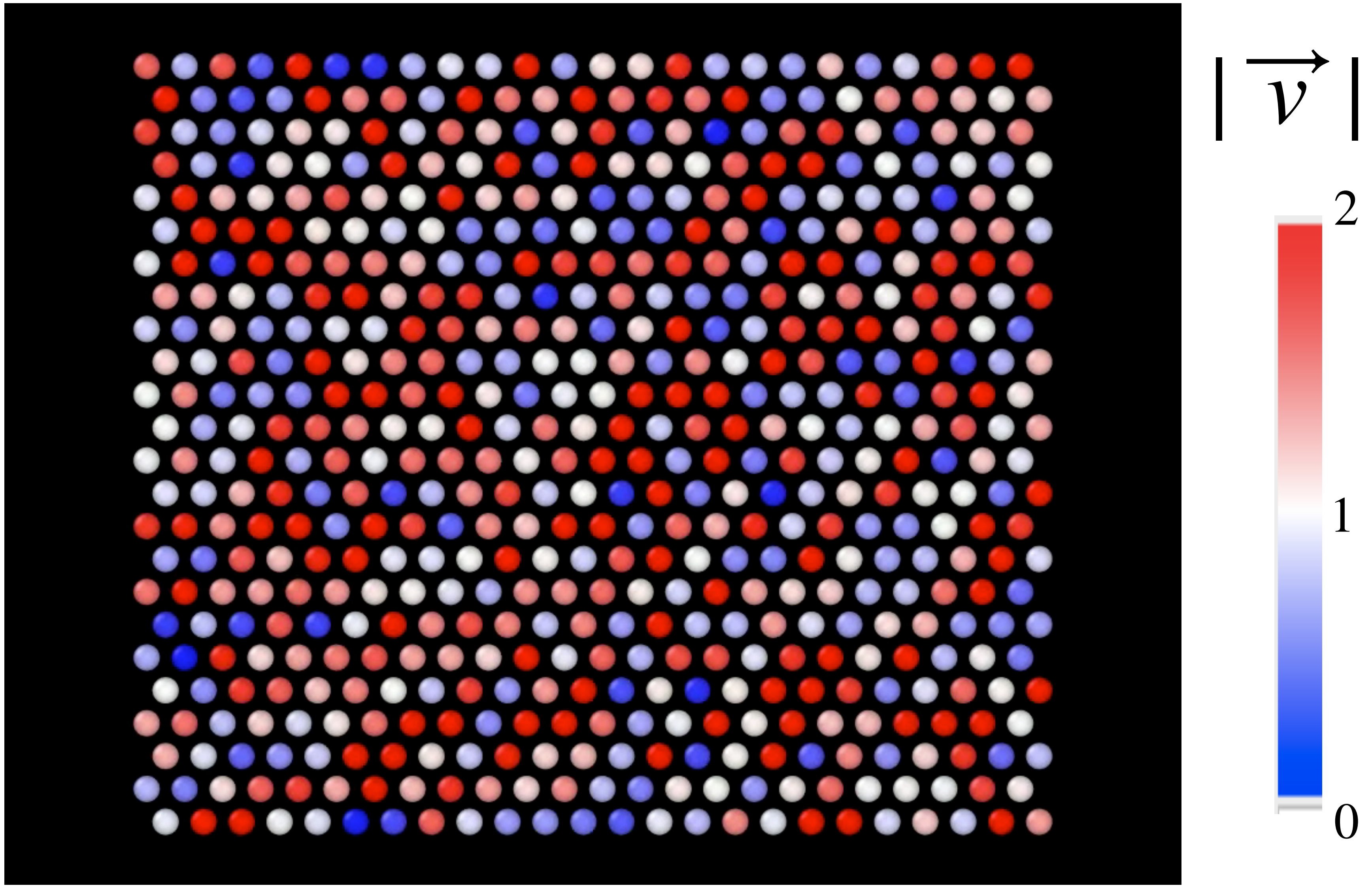




Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

При старте со случайных начальных условий наблюдаются хаотические колебания частиц

$b\sigma = 5$
$\mu = 1.4$
$v_0 = 0.14\omega_M\sigma$

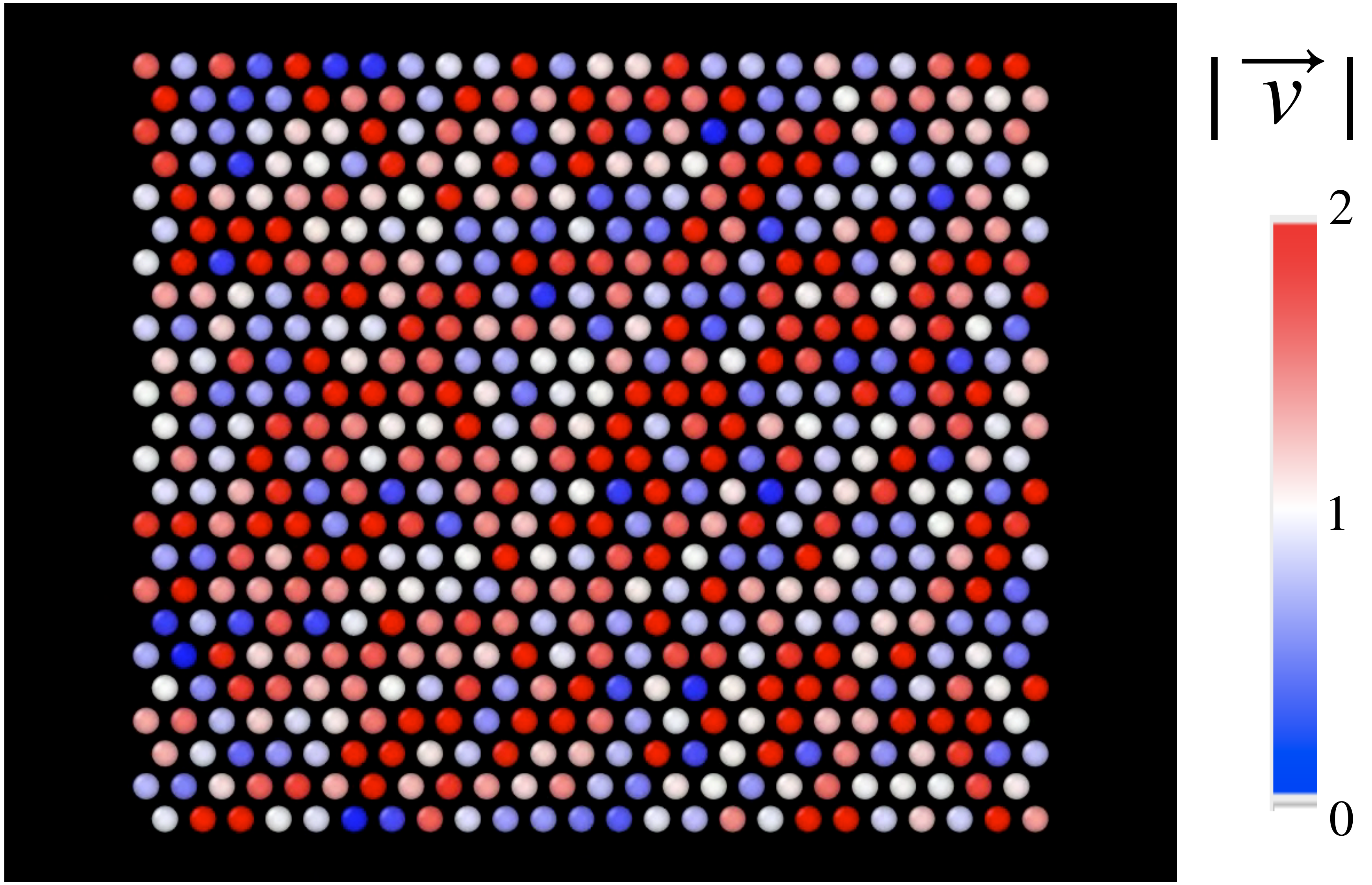


Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^5/\omega_M$

Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

При старте со случайных начальных условий наблюдаются хаотические колебания частиц

$b\sigma = 5$
$\mu = 1.4$
$v_0 = 0.14\omega_M\sigma$

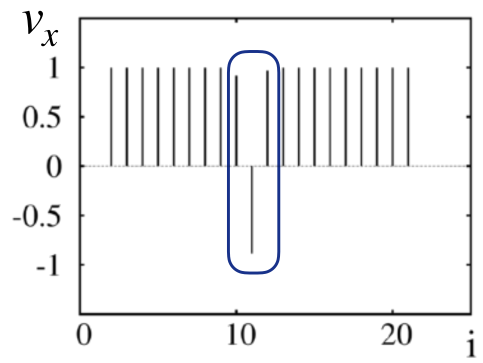


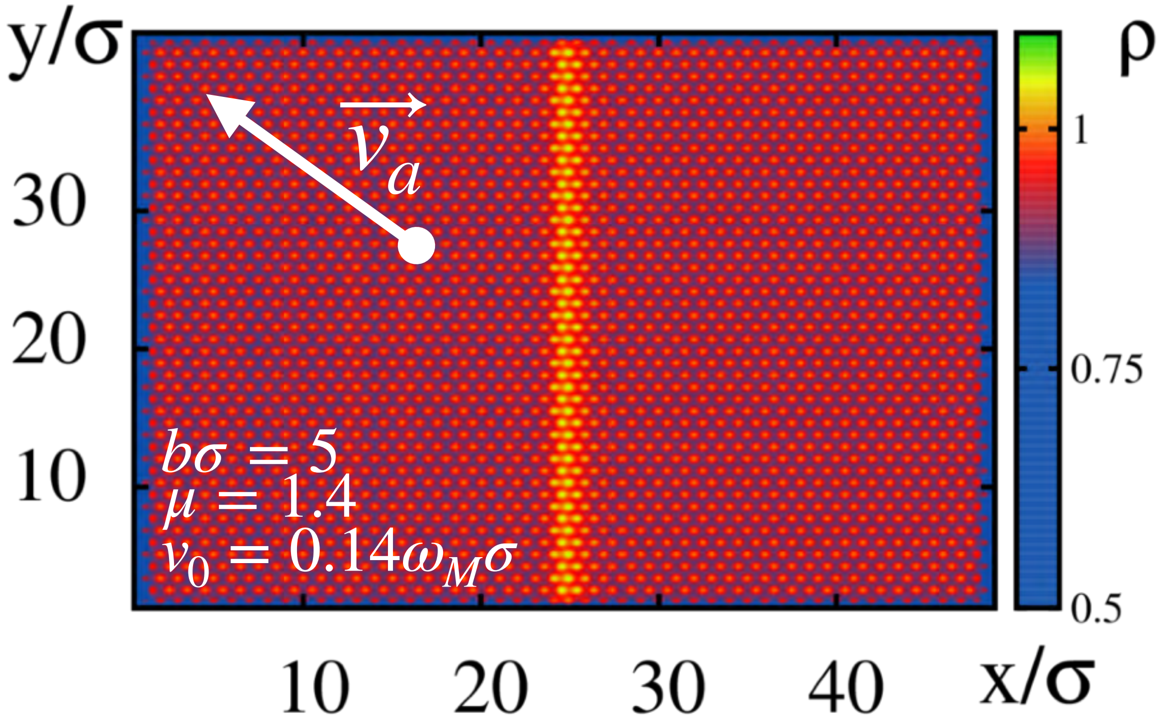
Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^5/\omega_M$

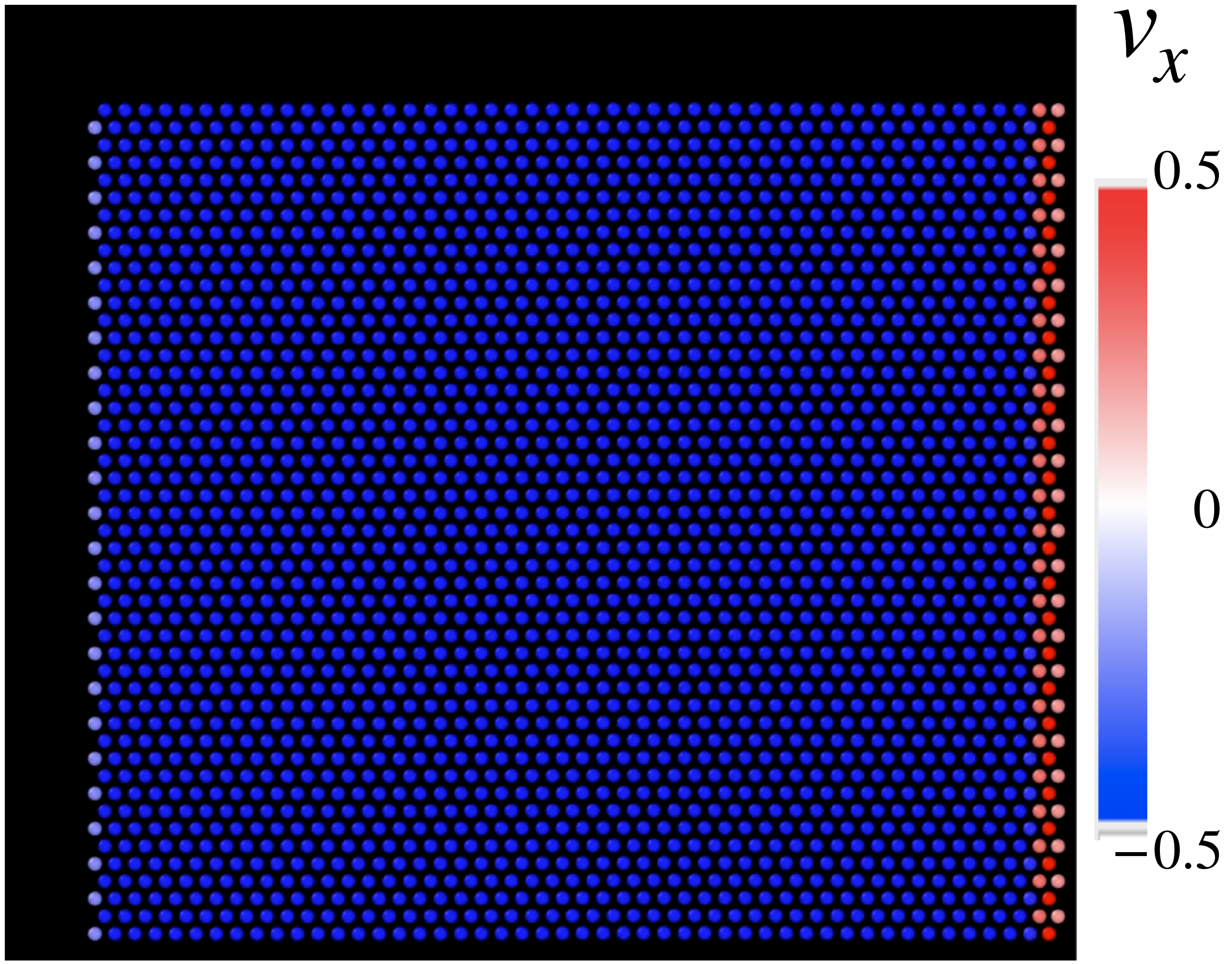
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Плоская солитоноподобная волна является наиболее «долгоживущим» метастабильным состоянием решетки

Суперпозиция одномерных солитонов [1]







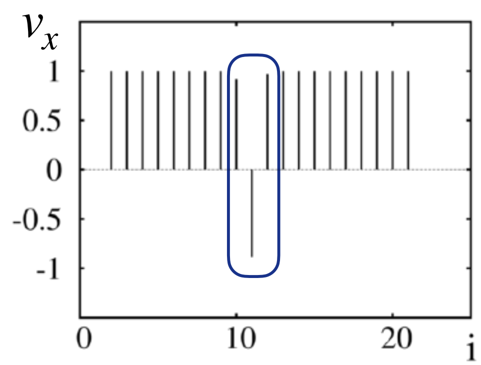
Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^4/\omega_M$

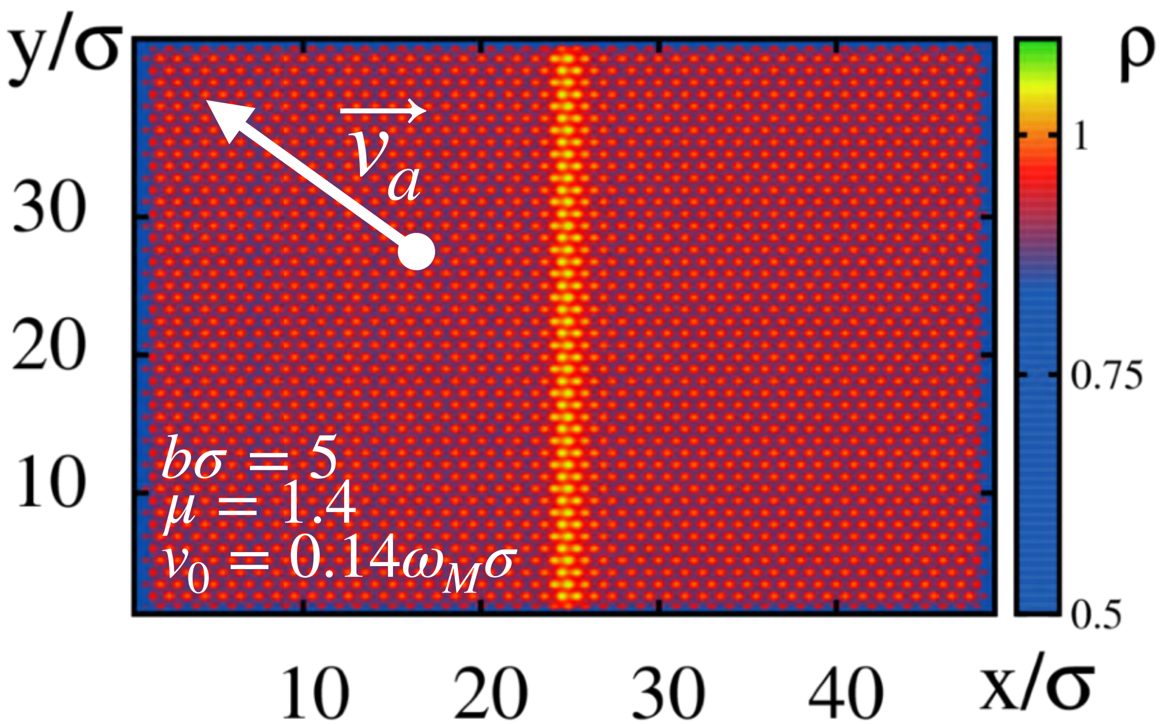
[1] Метастабильные возбуждения в цепочке Морзе—Рэлея / К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // *Нелинейная динамика, 2016, том 2, №3*

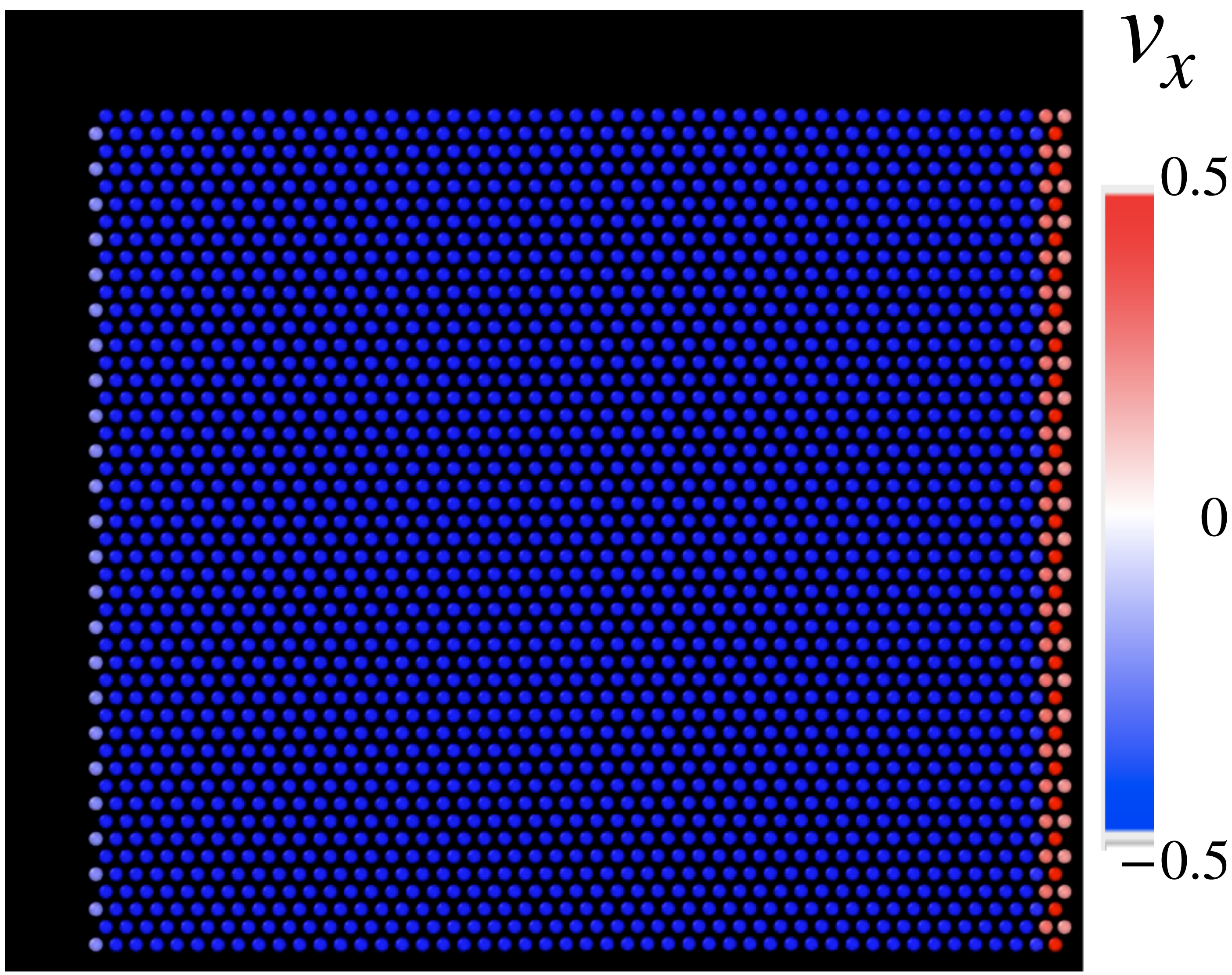
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Плоская солитоноподобная волна является наиболее «долгоживущим» метастабильным состоянием решетки

Суперпозиция одномерных солитонов [1]







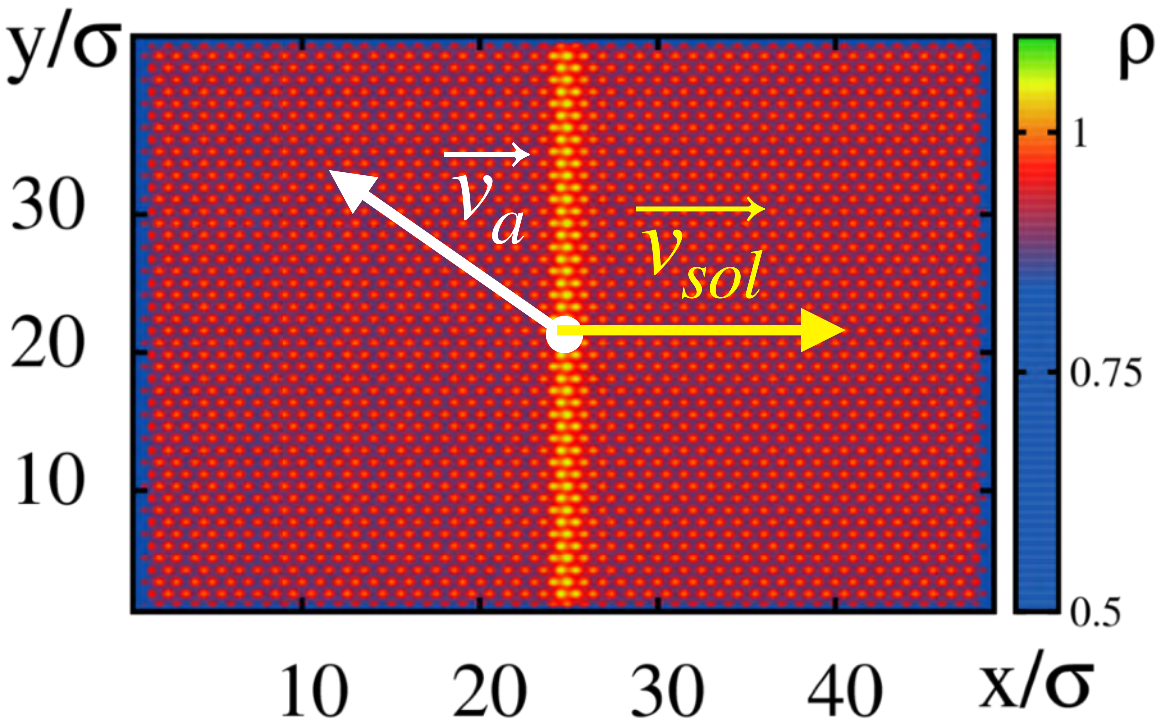
Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^4/\omega_M$

[1] Метастабильные возбуждения в цепочке Морзе—Рэлея / К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // *Нелинейная динамика, 2016, том 2, №3*

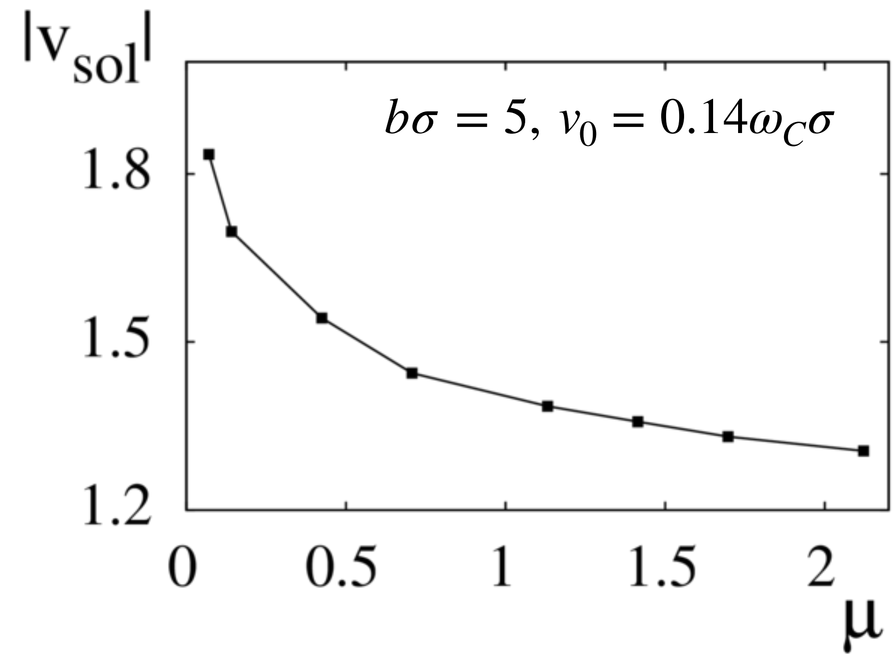
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

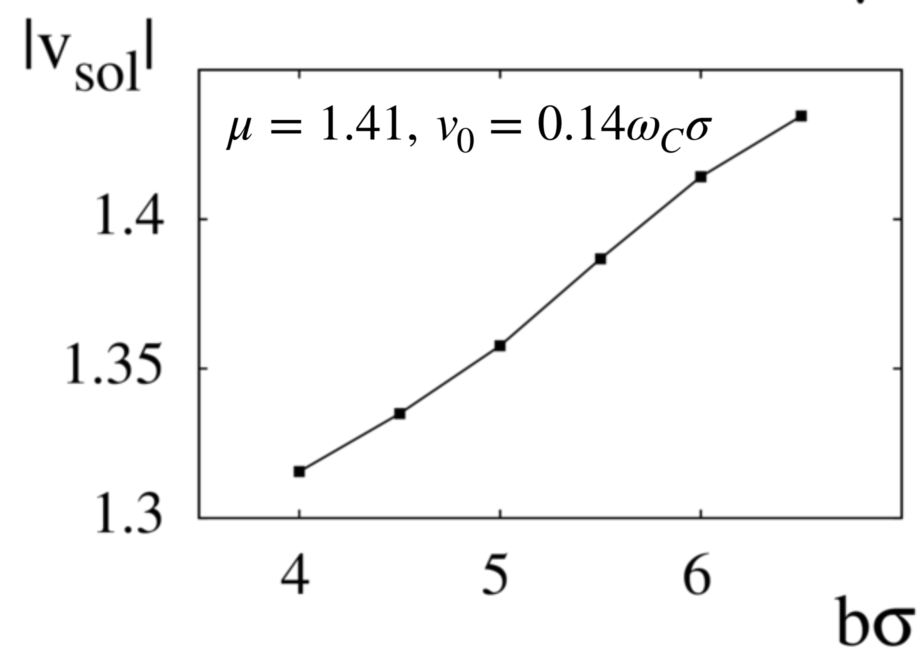
Скорость плоских солитоноподобных волн не зависит от начальных условий

$$\gamma(\vec{v}_i) = \tilde{\mu}\left(1 - \frac{|\vec{v}_i|^2}{\boxed{v_0^2}}\right)$$



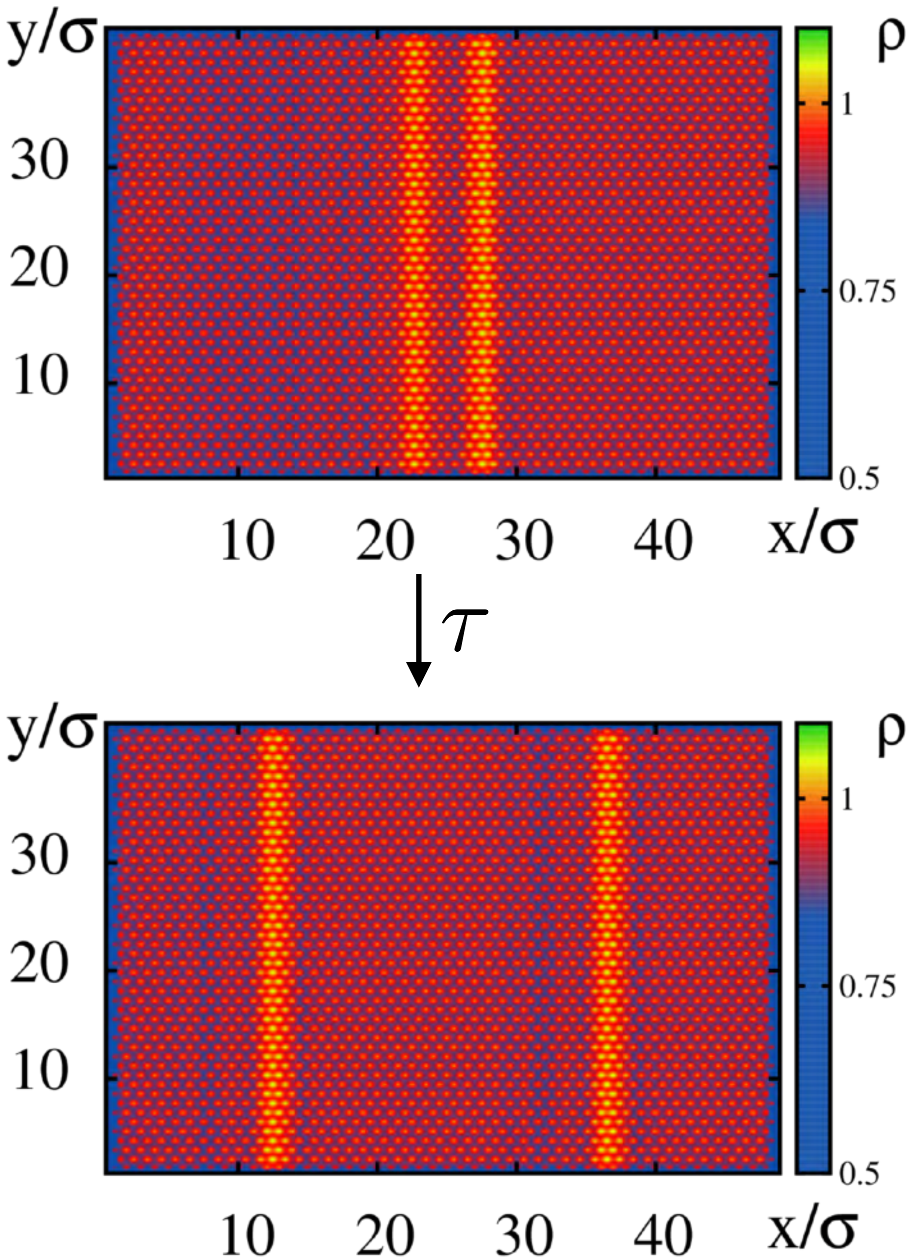
$$\vec{v}^{\,lab}_{sol} = \vec{v}_{sol} + \vec{v}_a$$



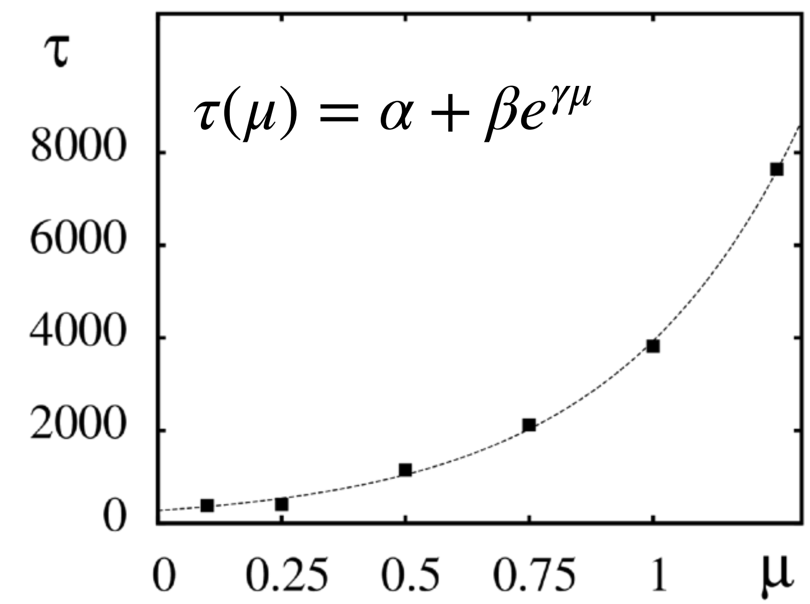


Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

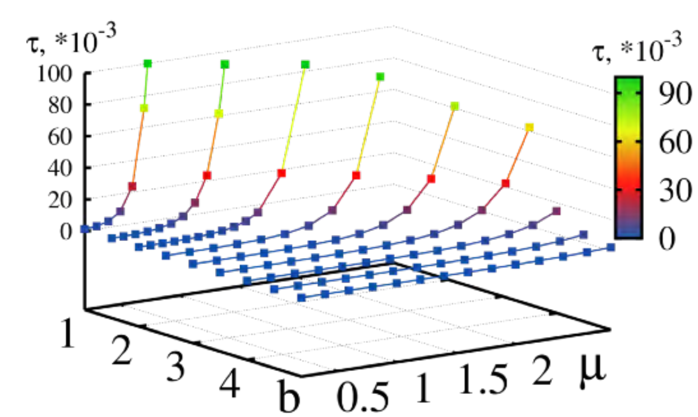
Максимальное количество плоских солитонов определяется размерами решетки.



Неравномерно распределенные солитоны являются **метастабильным состоянием,** а длительность переходного процесса экспоненциально зависит от параметра μ.



В [1] были получены аналогичные результаты для **одномерной** цепочки Морзе-Рэлея

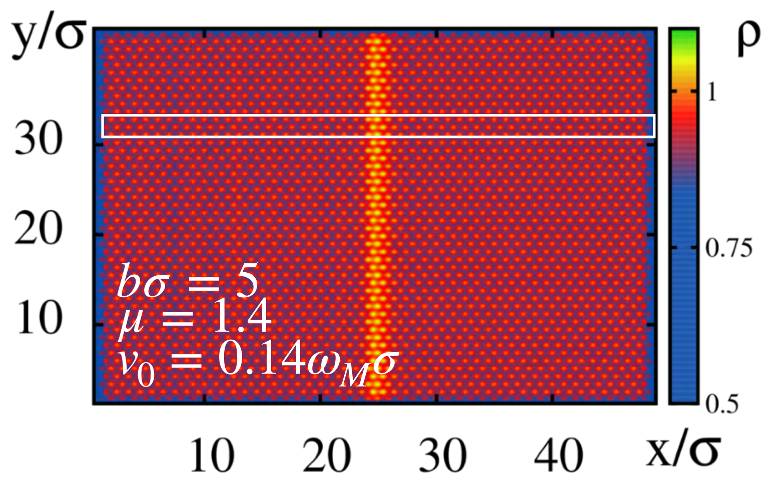


$$\tau(b, \mu = 1, N) = 1000exp(-3.2b + 4.7\mu + 0.285N - 2.6)$$

[1] Метастабильные возбуждения в цепочке Морзе—Рэлея / К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // *Нелинейная динамика, 2016, том 2, №3*

Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

В качестве метода количественной идентификации различных метастабильных состояний разумно использовать **структурный динамический фактор (СДФ)**



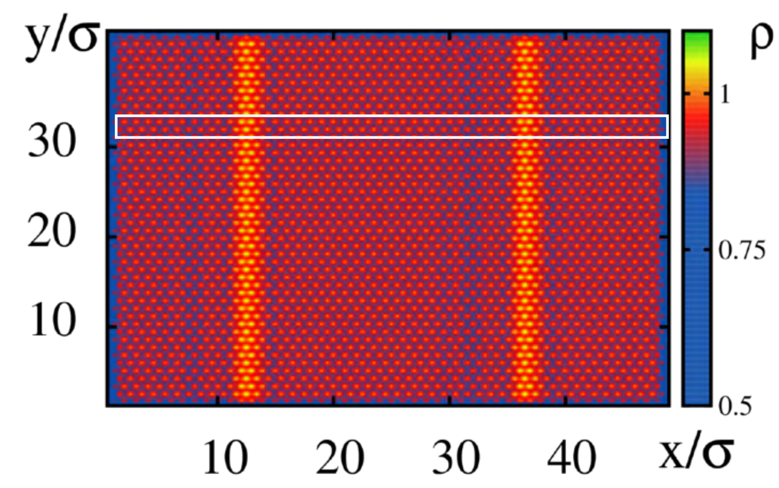
СДФ рассчитывается по формуле

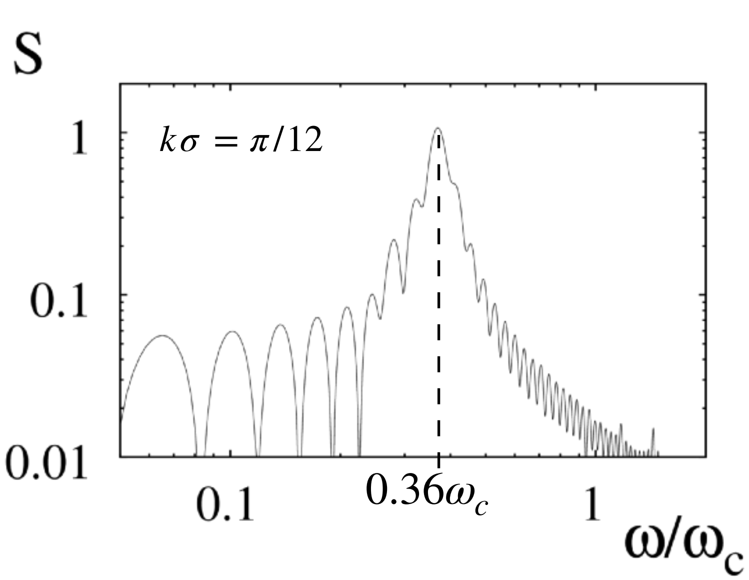
$$S(\omega,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}\langle\rho_{1d}(k,\tau)\rho_{1d}(-k,0)\rangle d\tau$$

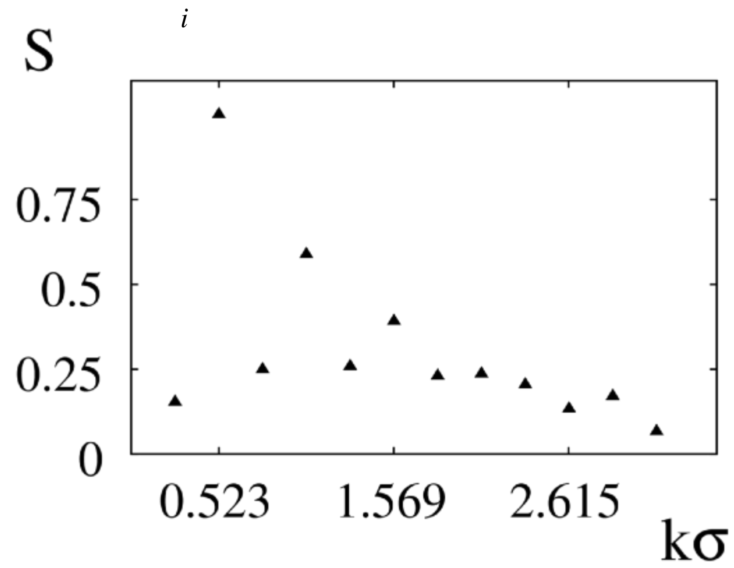
где ω и $k\sigma$ - частота и волновое число, соответствующие направлению распространения волны.
Функция плотности и ее пространственное преобразование Фурье:

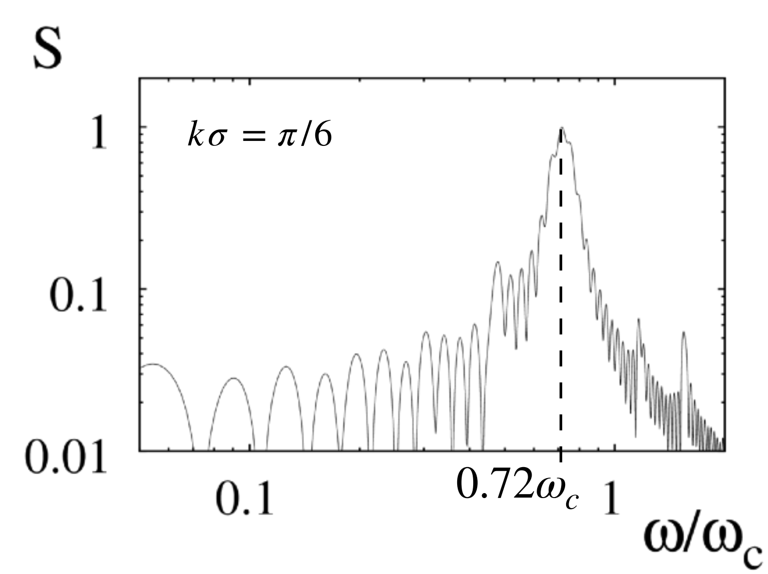
$$\rho_{1d}(x,\tau)=\sum_i \delta(x-x_i(\tau))$$

$$\rho_{1d}(k,\tau)=\sum_i e^{-jkx_i(\tau)}$$



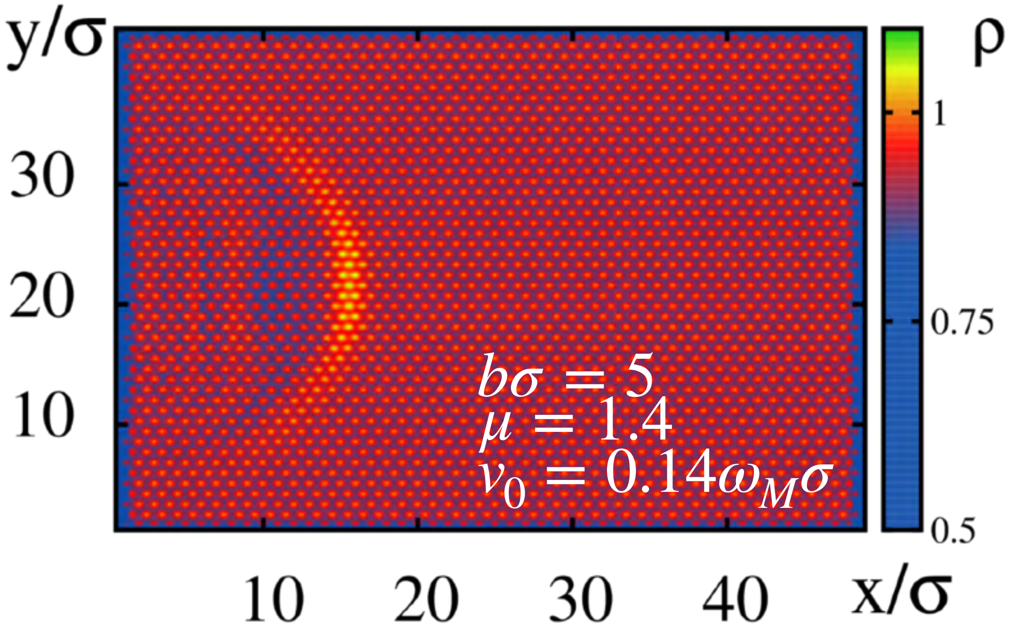


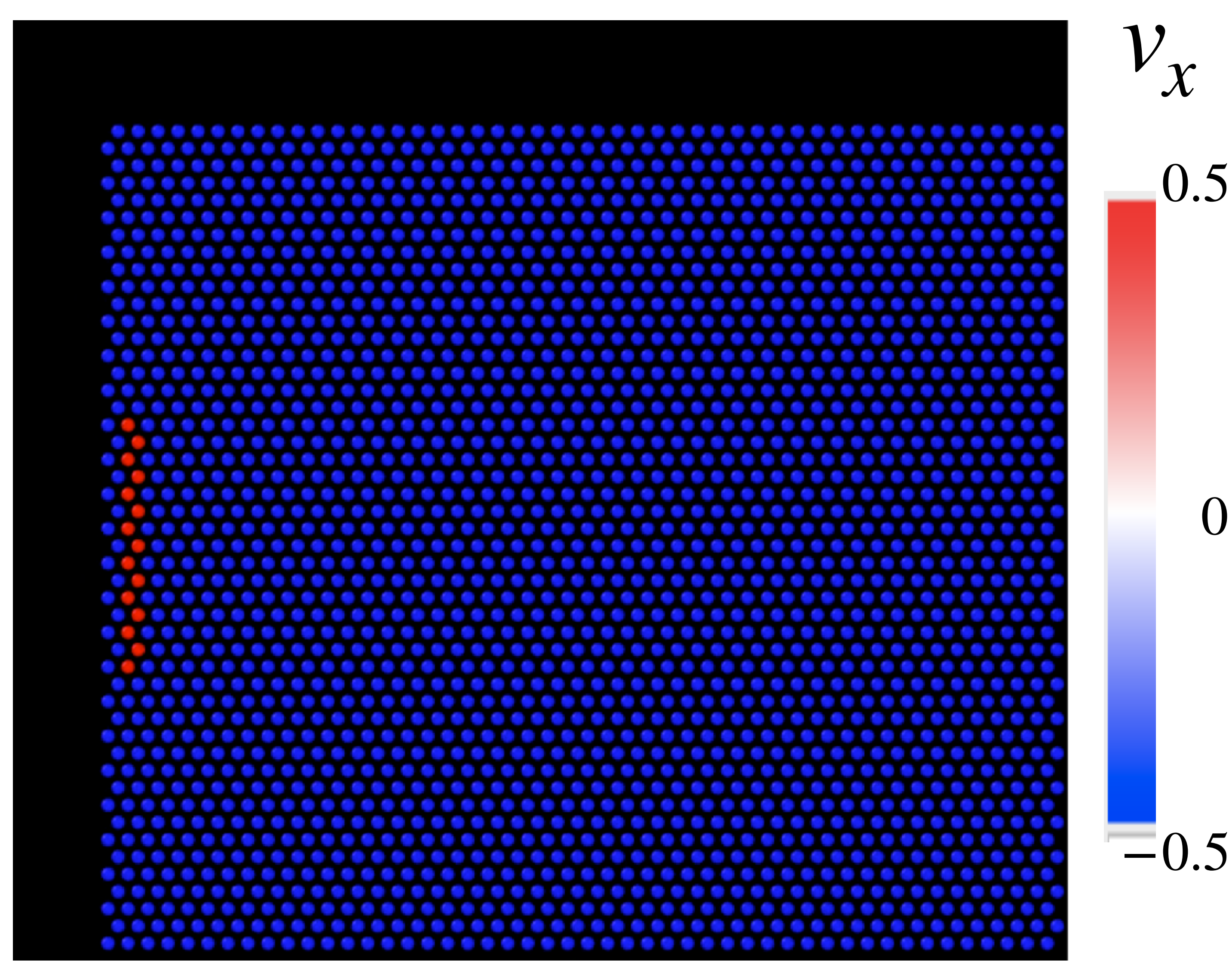




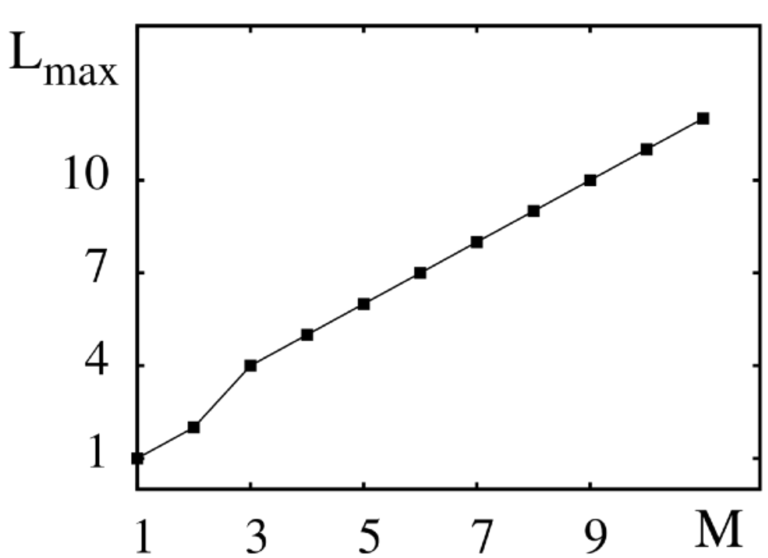
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Подковообразные солитоны (*M*-солитоны)





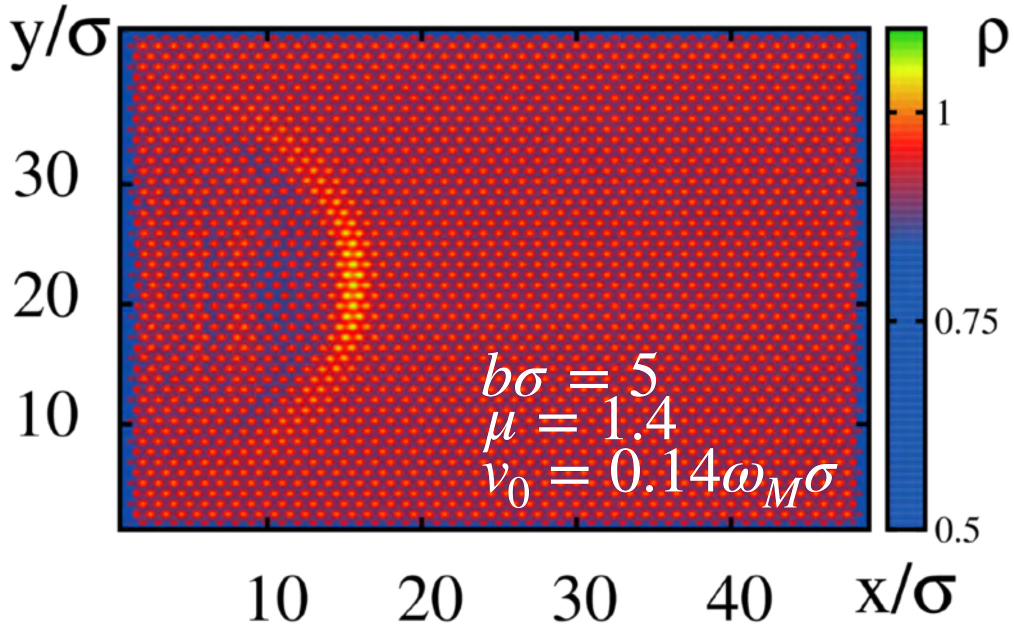
Длина пробега подковообразного солитона линейно зависит от ширины фронта



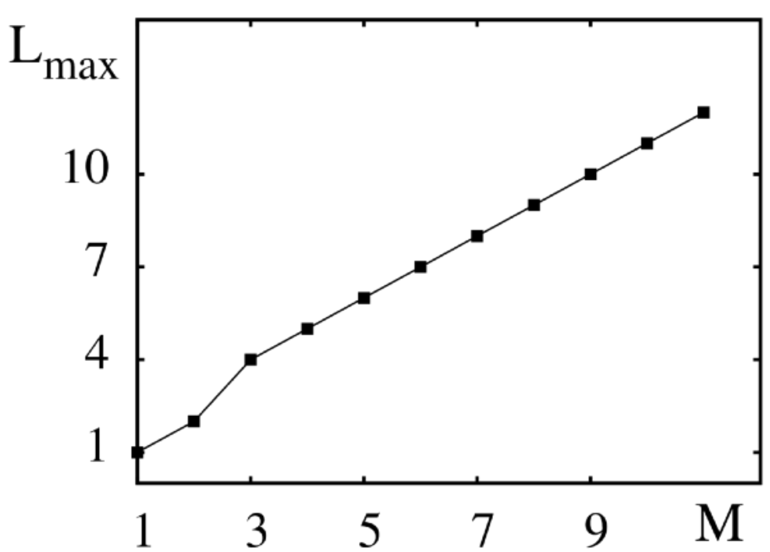
Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^2/\omega_M$

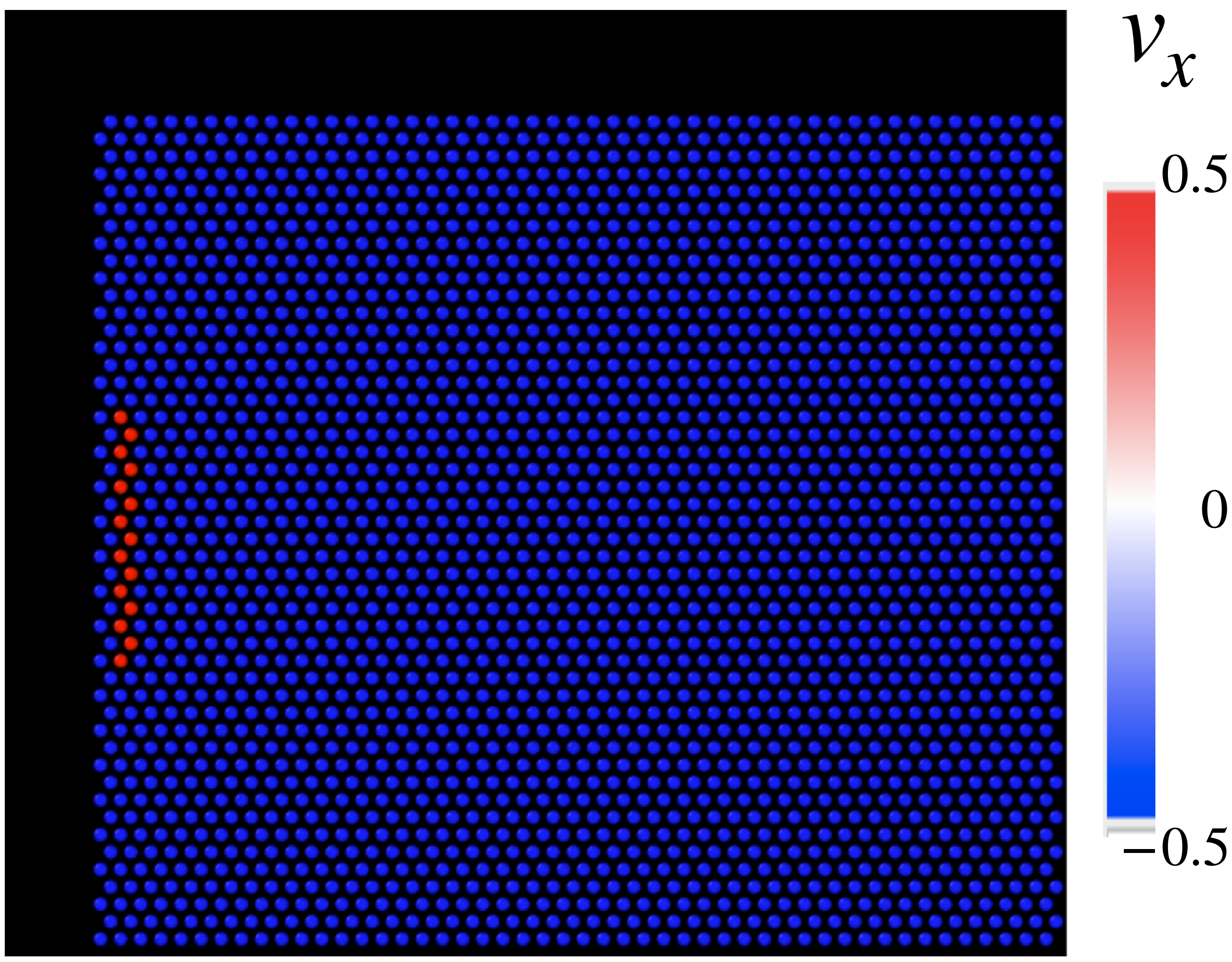
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Подковообразные солитоны (*M*-солитоны)



Длина пробега подковообразного солитона линейно зависит от ширины фронта

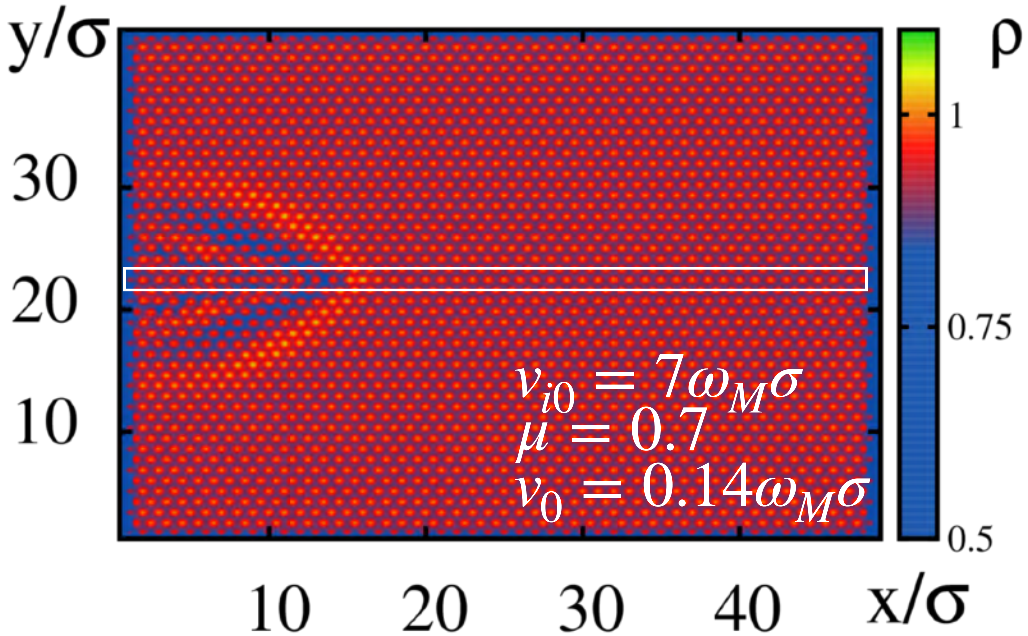




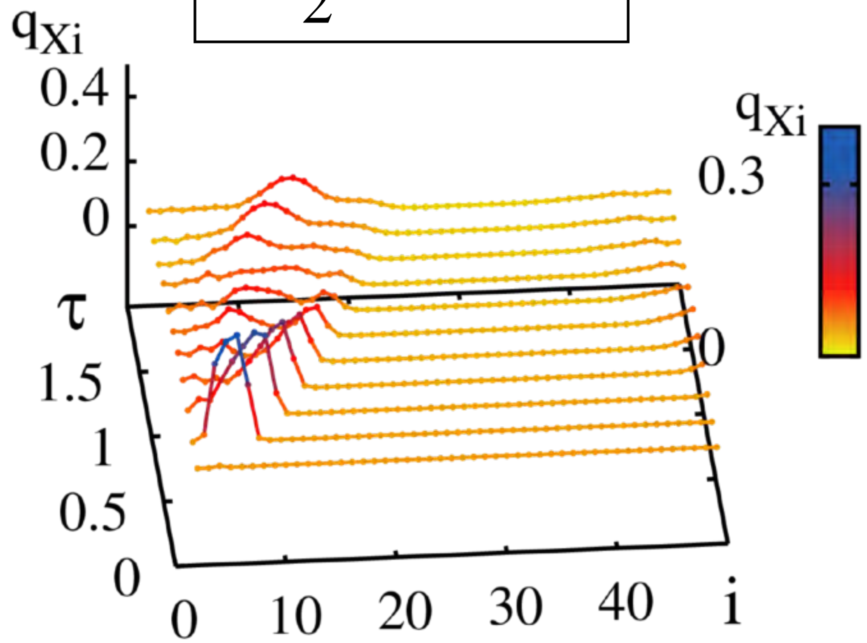
Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^2/\omega_M$

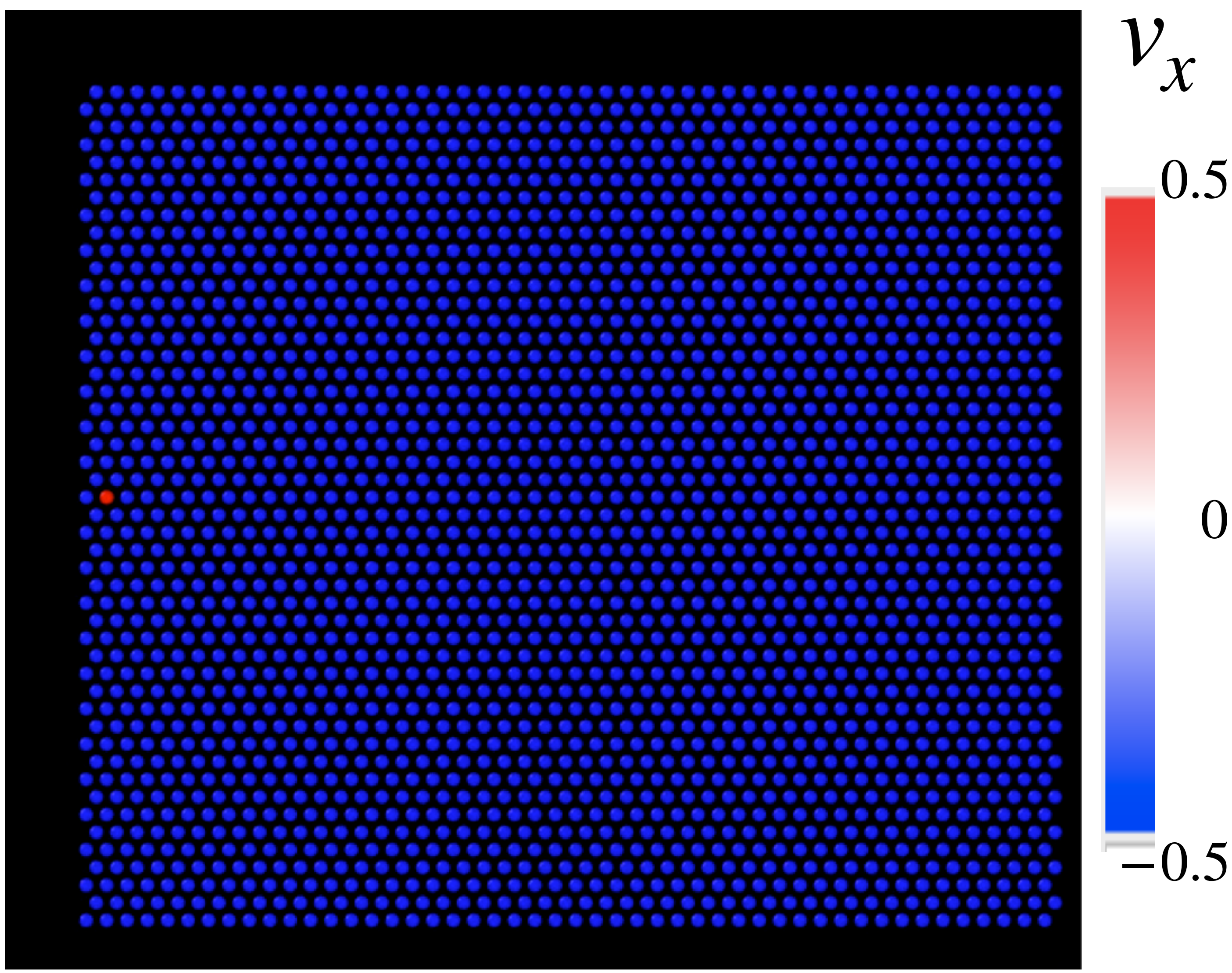
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Квазиодномерные **солитоны**



$$\boxed{\frac{mv_0^2}{2} < \Delta U_{PN}}$$

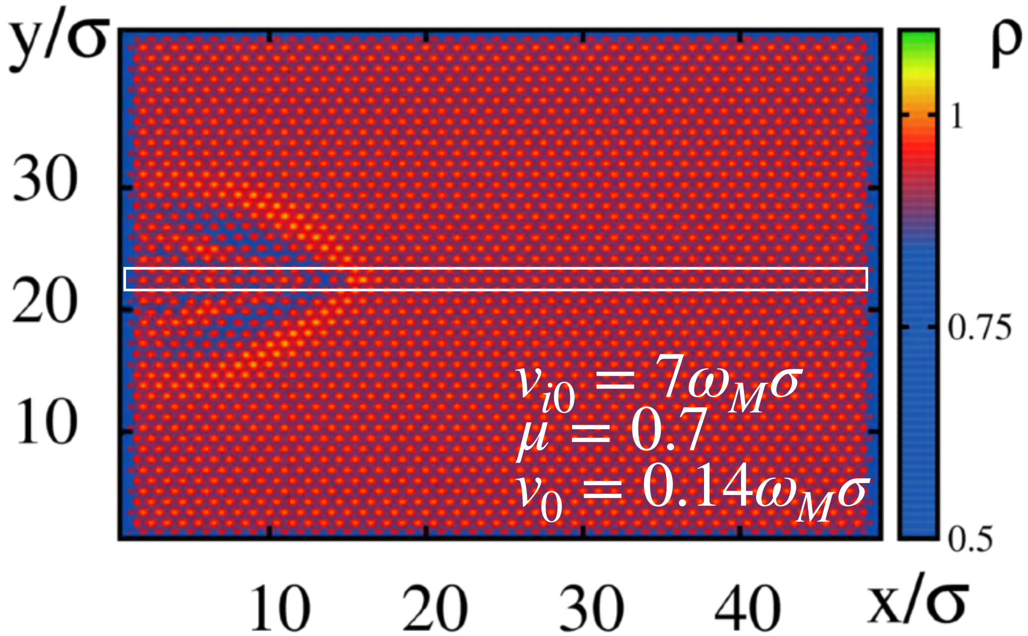




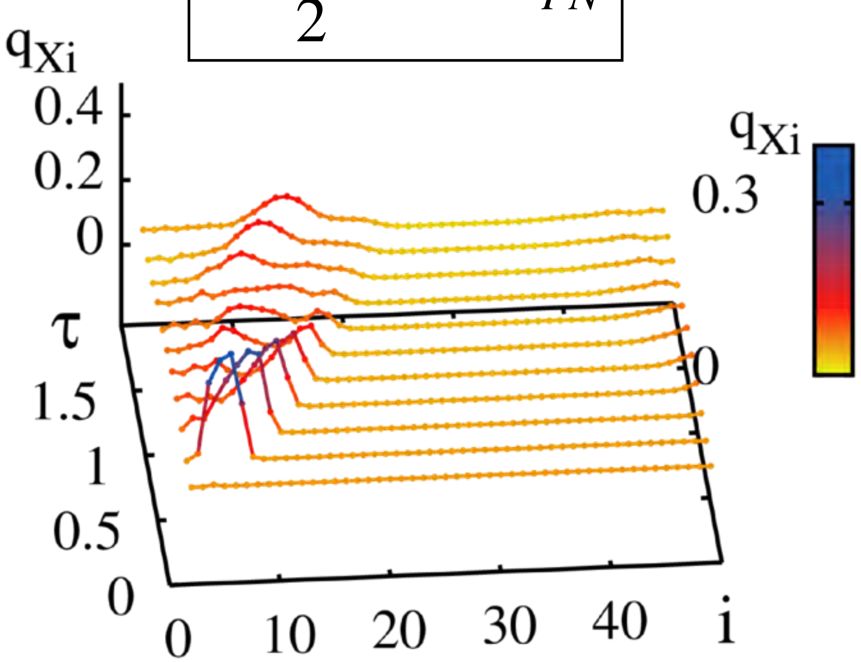
Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^1/\omega_M$

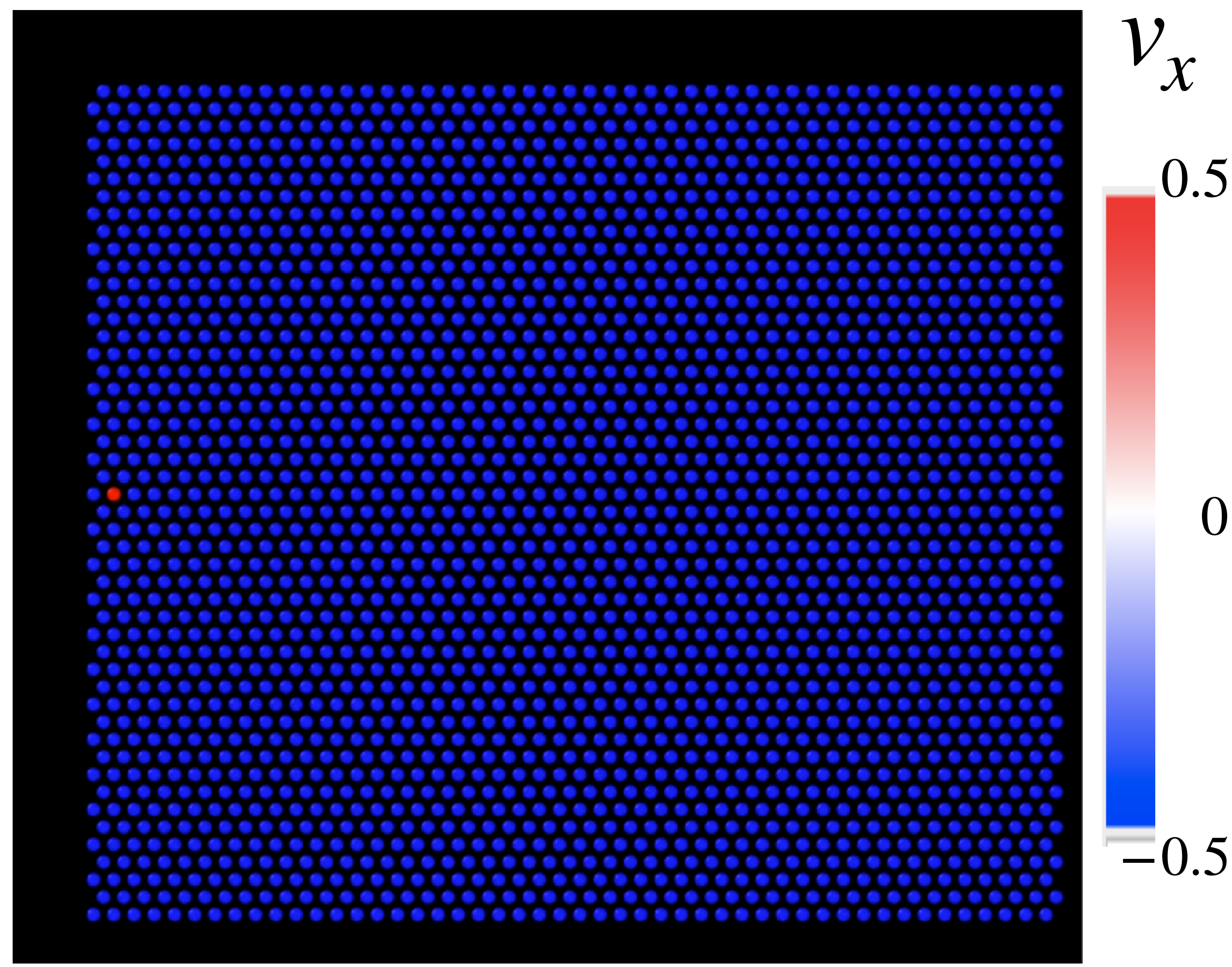
Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Квазиодномерные **солитоны**



$$\boxed{\frac{mv_0^2}{2} < \Delta U_{PN}}$$



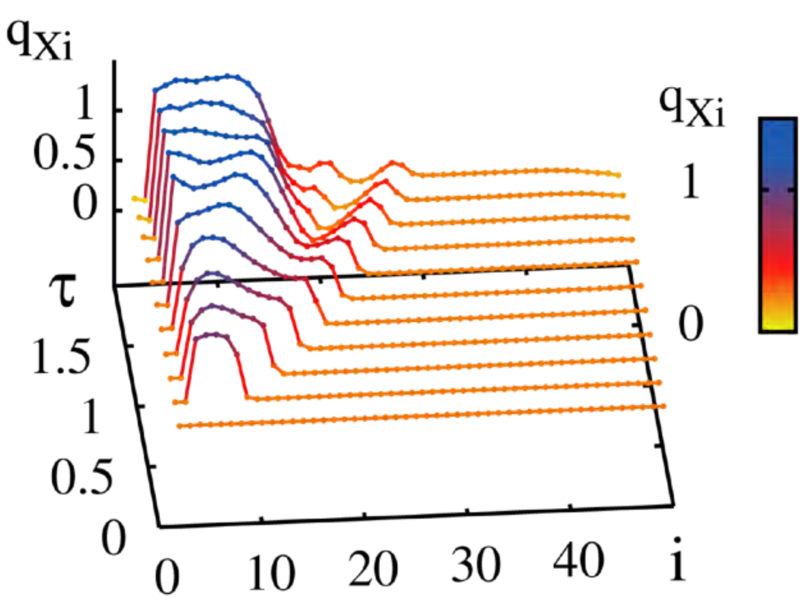


Характерные времена жизни $\tau_{max} \approx 10^1/\omega_M$

Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

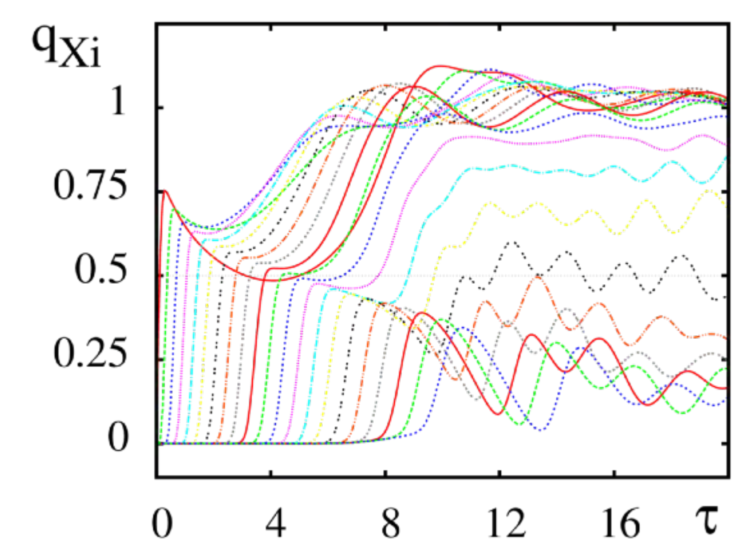
Формирование **краудионов** при асимптотических значениях параметров

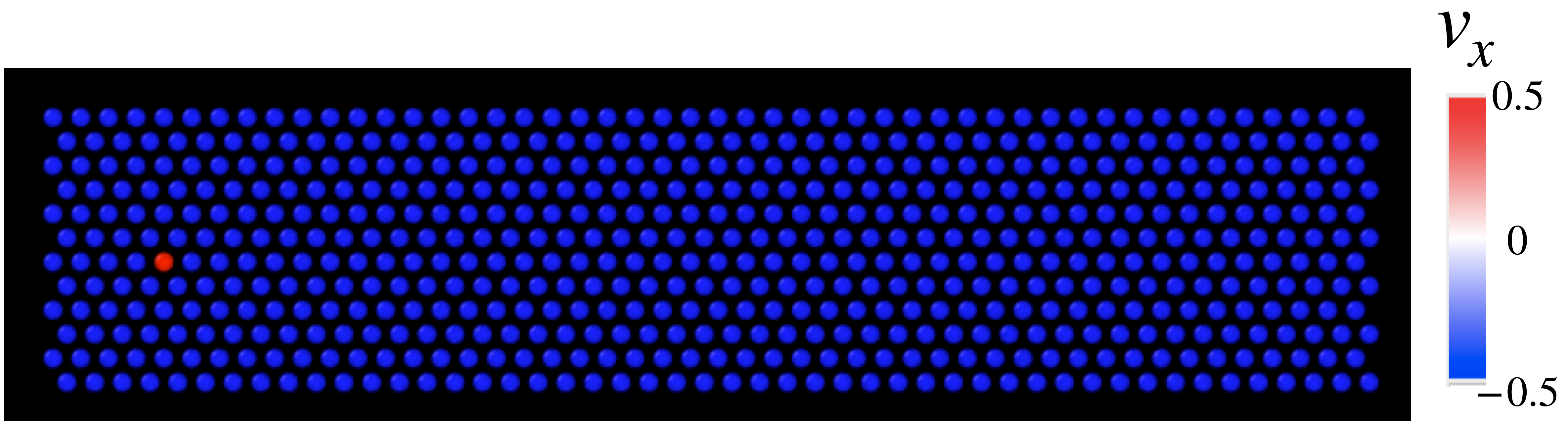
$$\boxed{v_{i0} \approx 7\omega_M\sigma, \mu = 0.07, v_0 = 0.56\omega_M\sigma}$$



«Активность» решетки мала, краудион возбуждается практически как в консервативной решетке при достаточно большой начальной энергии частицы

$$\boxed{\frac{mv_{i0}^2}{2} > \Delta U_{PN}}$$

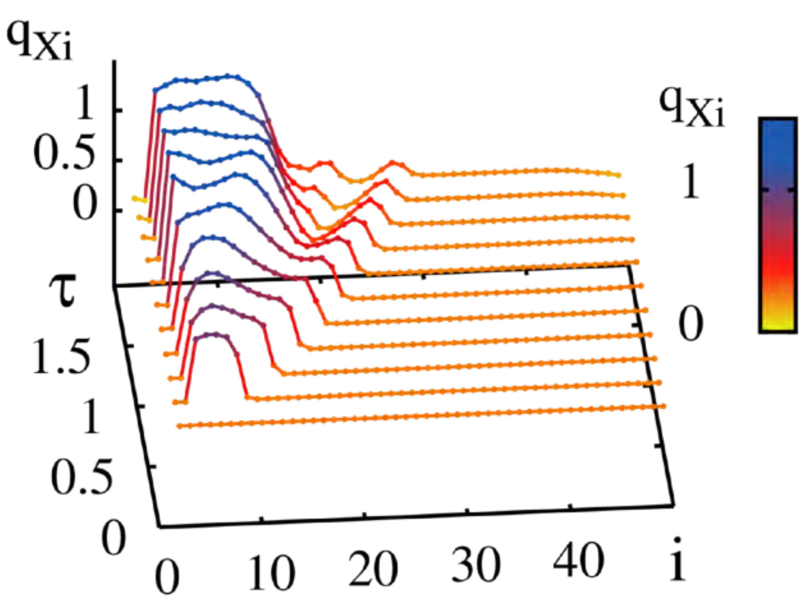




Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

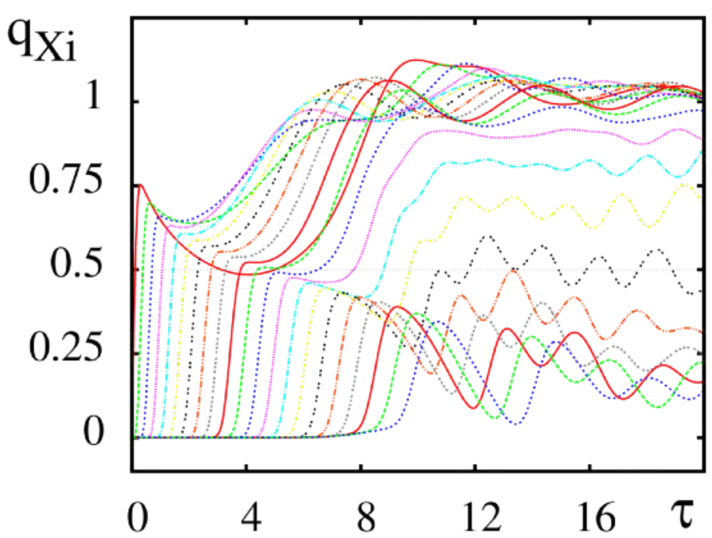
Формирование **краудионов** при асимптотических значениях параметров

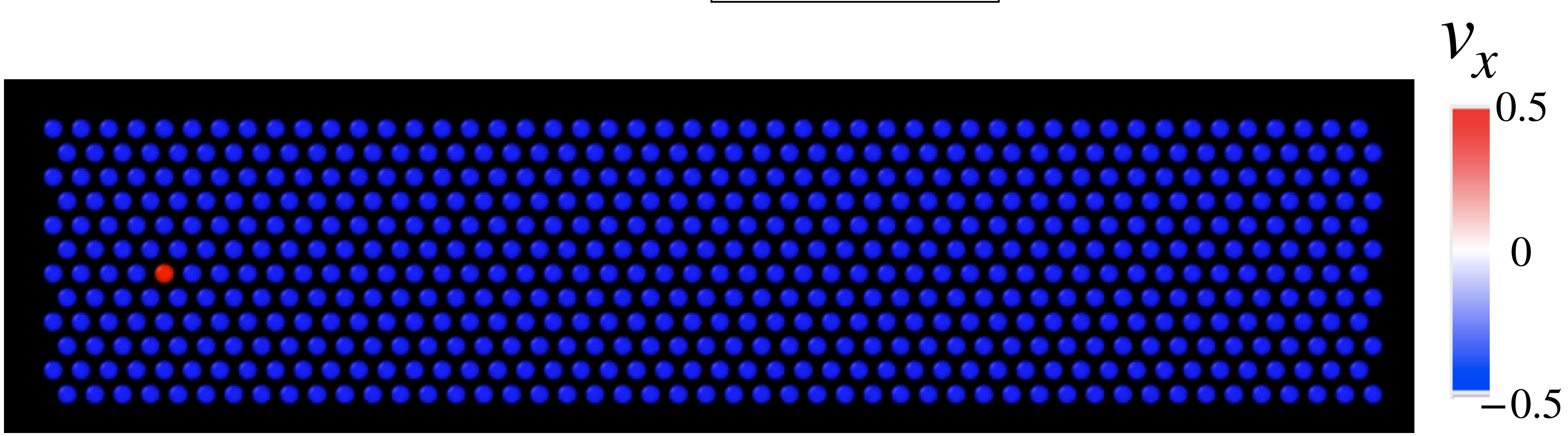
$$\boxed{v_{i0} \approx 7\omega_M\sigma, \mu = 0.07, v_0 = 0.56\omega_M\sigma}$$



«Активность» решетки мала, краудион возбуждается практически как в консервативной решетке при достаточно большой начальной энергии частицы

$$\boxed{\frac{mv_{i0}^2}{2} > \Delta U_{PN}}$$



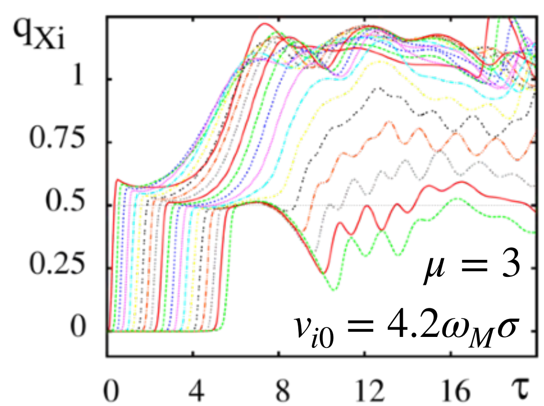


Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Формирование **краудионов** при асимптотических значениях параметров

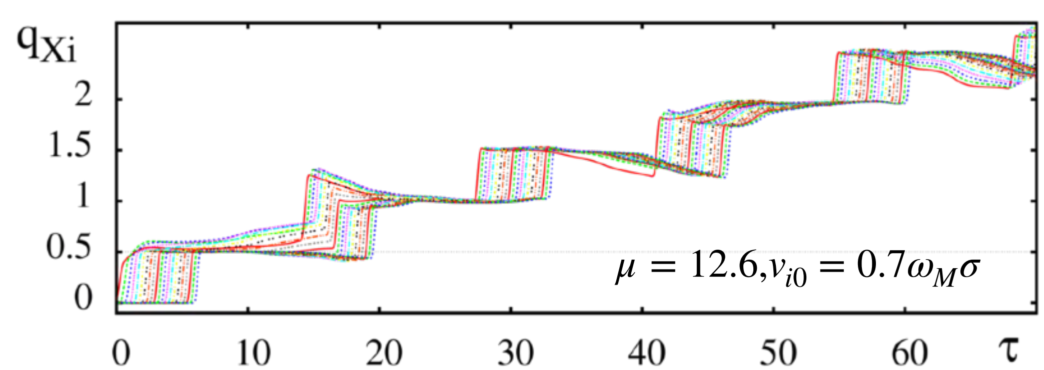
$$v_0 = 0.84\omega_M\sigma$$

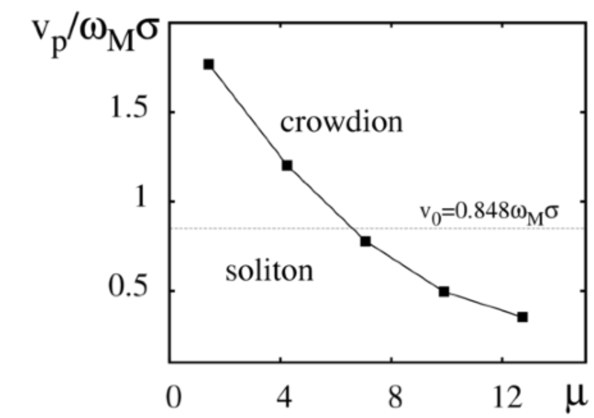
Когда стационарное значение кинетической энергии велико, краудионы возбуждаются в широком диапазоне начальных скоростей возмущаемых частиц

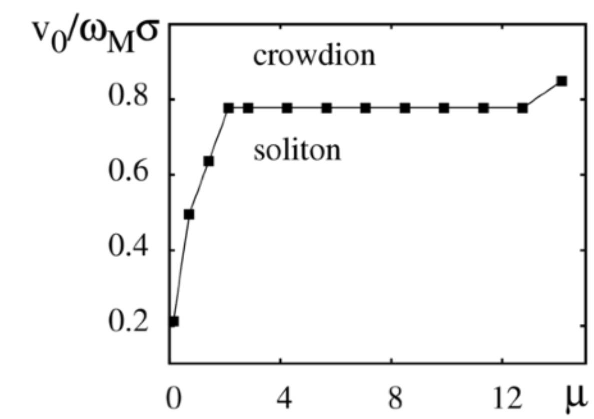


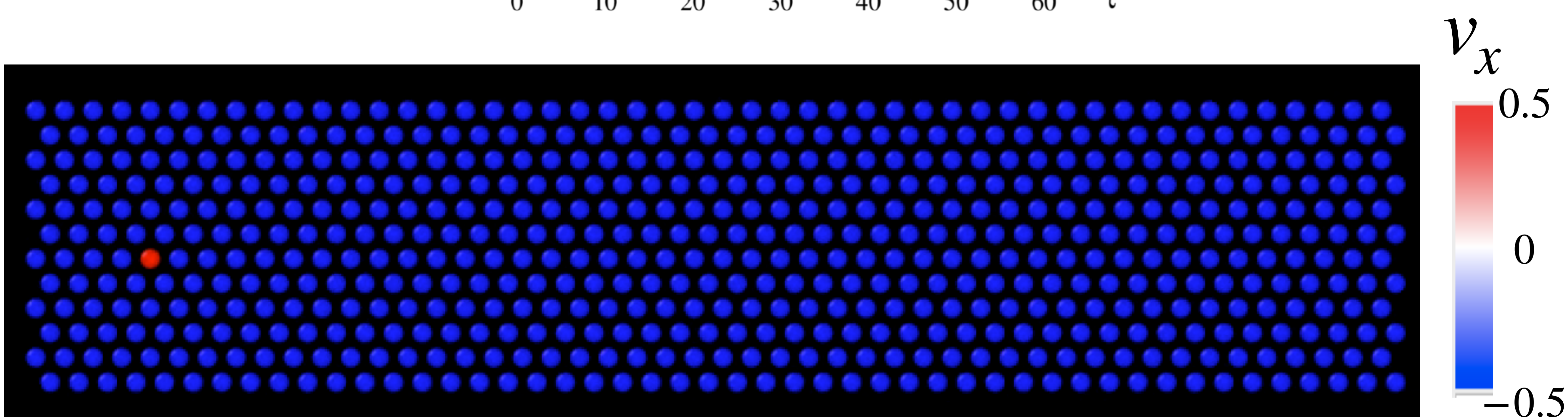
$$\frac{mv_0^2}{2} > \Delta U_{PN}$$

$$\tau_{max} \to \infty$$







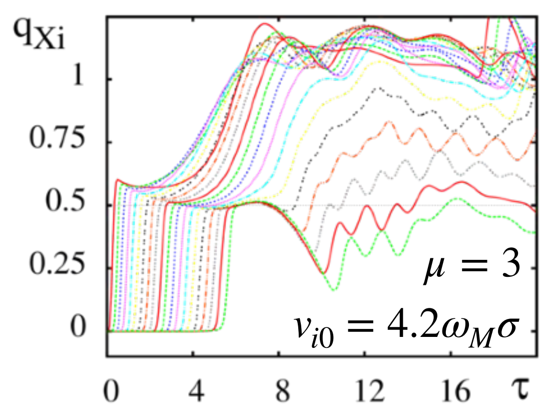


Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

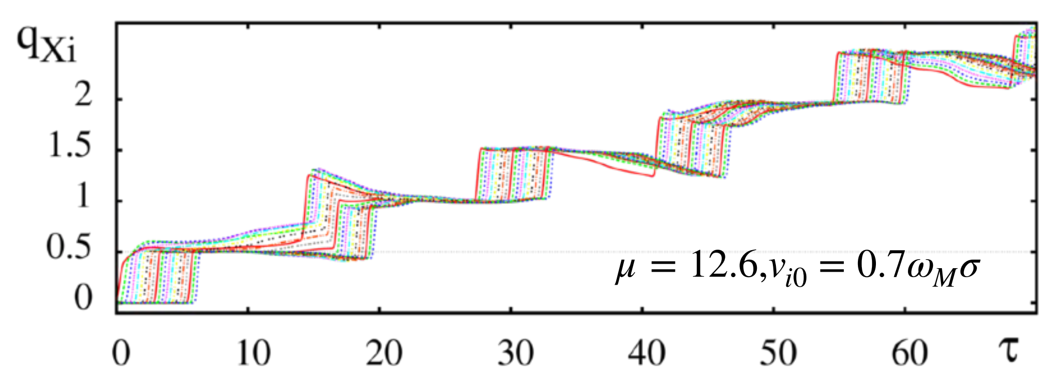
Формирование **краудионов** при асимптотических значениях параметров

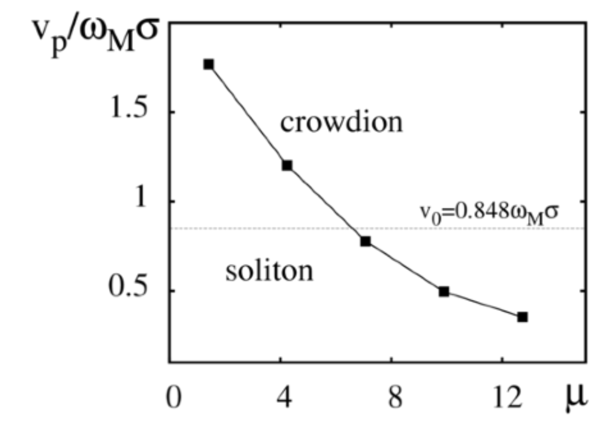
$$v_0 = 0.84\omega_M\sigma$$

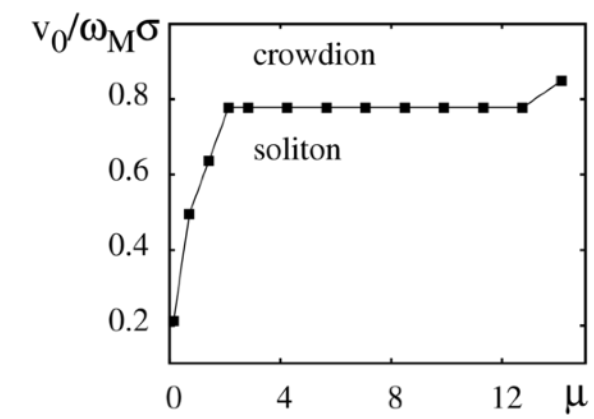
Когда стационарное значение кинетической энергии велико, краудионы возбуждаются в широком диапазоне начальных скоростей возмущаемых частиц

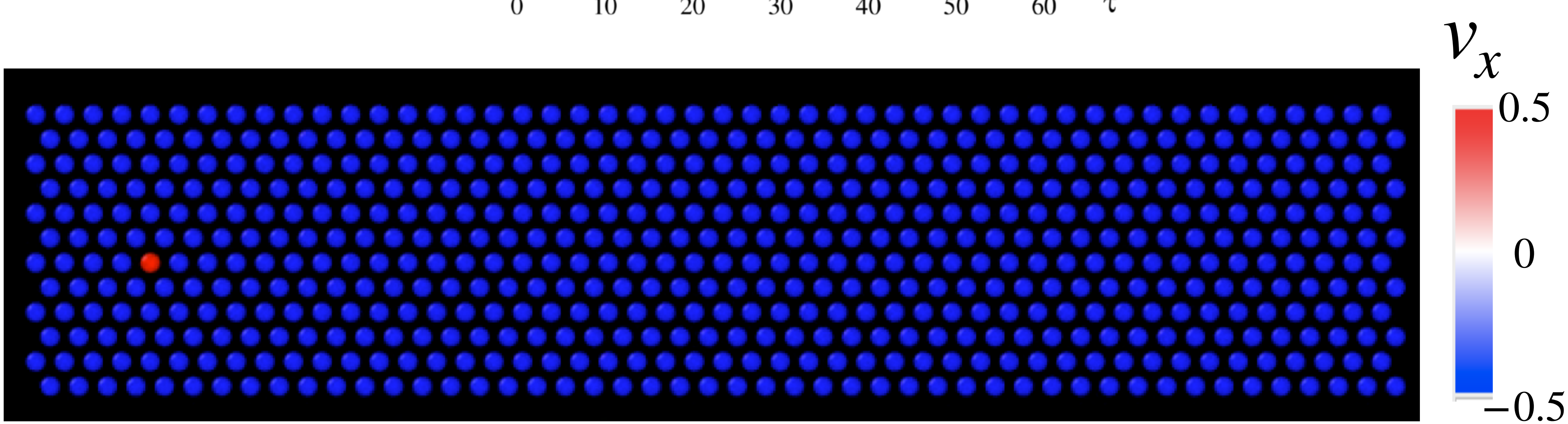


$$\frac{mv_0^2}{2} > \Delta U_{PN}$$
$$\tau_{max} \to \infty$$



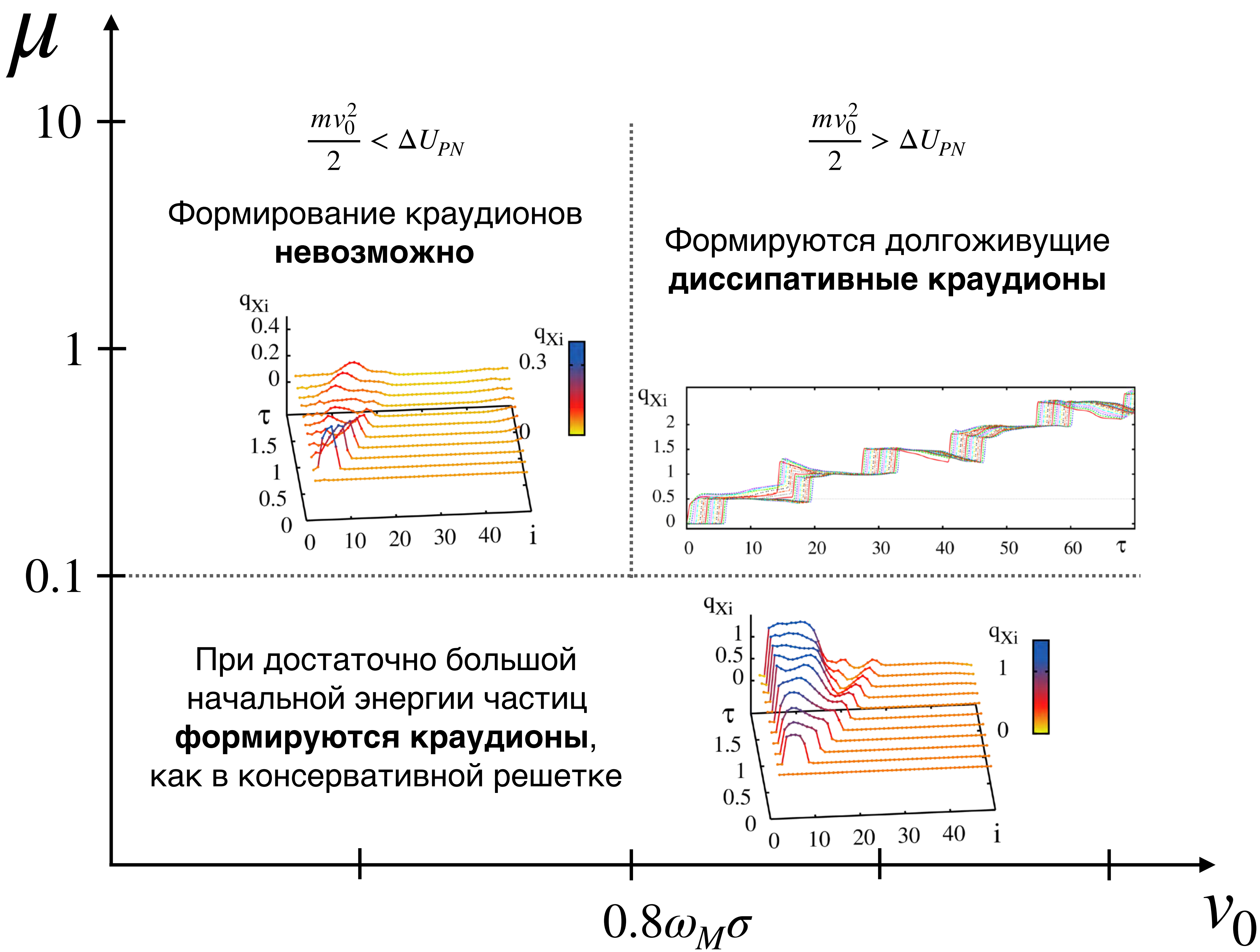






Метастабильные состояния двумерной треугольной решетки

Формирование **краудионов** при асимптотических значениях параметров



Заключение

- В решетке активных частиц с треугольной симметрией набор стационарных мод (аттракторов) представлен трансляционными модами как с равномерным распределением частиц в пространстве, так и трансляционными модами с дефектами.
- При старте со стохастических начальных условий наблюдаются затухающие хаотические колебания, которые можно отнести к метастабильным состояниям.
- В треугольной решетке возможно возбуждение нескольких типов метастабильных состояний, трансформирующихся со временем в стационарные моды: одиночных плоских солитонов, состояний с несколькими равномерно распределенными плоскими солитонами, подковообразных M-солитонов и квазиодномерных солитонов.
- Плоские солитоны в случае, когда они неравномерно распределены по решетке, трансформируются либо непосредственно в трансляционную моду, либо сначала в метастабильное состояние с равномерным распределением солитонов по ячейке моделирования, которое далее переходит в стационарную трансляционную моду.
- Формирование локализованных метастабильных возбуждений – диссипативных краудионов возможно в определенных диапазонах параметров. Краудионы в активных решетках обладают большим временем жизни по сравнению с консервативными.

Заключение

- В решетке активных частиц с треугольной симметрией набор стационарных мод (аттракторов) представлен трансляционными модами как с равномерным распределением частиц в пространстве, так и трансляционными модами с дефектами.
- При старте со стохастических начальных условий наблюдаются затухающие хаотические колебания, которые можно отнести к метастабильным состояниям.
- В треугольной решетке возможно возбуждение нескольких типов метастабильных состояний, трансформирующихся со временем в стационарные моды: одиночных плоских солитонов, состояний с несколькими равномерно распределенными плоскими солитонами, подковообразных M-солитонов и квазиодномерных солитонов.
- Плоские солитоны в случае, когда они неравномерно распределены по решетке, трансформируются либо непосредственно в трансляционную моду, либо сначала в метастабильное состояние с равномерным распределением солитонов по ячейке моделирования, которое далее переходит в стационарную трансляционную моду.
- Формирование локализованных метастабильных возбуждений – диссипативных краудионов возможно в определенных диапазонах параметров. Краудионы в активных решетках обладают большим временем жизни по сравнению с консервативными.

Спасибо за внимание!