

# Пространственная фильтрация кластерных структур в ансамблях отображений

Алексей Шабунин

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

КНИТ-2018

# Предмет исследований –

мультистабильность периодических орбит в ансамбле отображений с бифуркациями удвоения периода

уравнение системы:

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{j=-L}^L [f(x_{i+j}(n)) - f(x_i(n))]$$

где  $f(x) = \alpha x(1-x)$

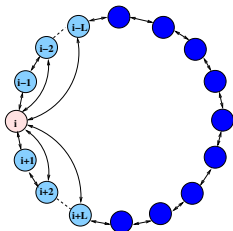
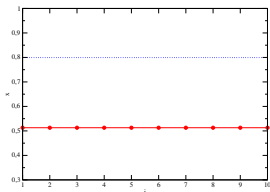
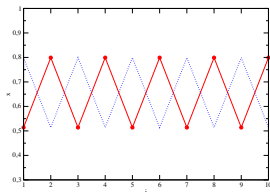


Рис. : Структура связей системы

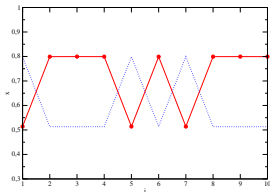
# Мультистабильность периодических орбит – пространственные кластерные структуры



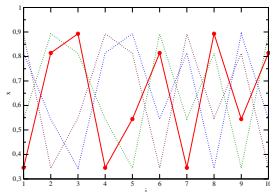
(a)  $2C^{0000000000}$



(b)  $2C^{0101010101}$



(c)  $2C^{0111010111}$



(d)  $4C^{0310230123}$

Рис. : Пространственные профили орбит периода два и четыре

- Сколько всего мультистабильных состояний?
- Как их число меняется с ростом силы и радиуса связей?
- Как пространственная структура орбиты влияет на ее «жизнестойкость»?

# Максимальное число мультистабильных состояний $M$ -орбиты

$M$ -периодическая орбита — упорядоченный набор из  $M$  точек  $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(M)}\}$ , циклически сменяющих друг друга:

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$$

Ансамбль из  $N$  отображений может демонстрировать  $M^{N-1}$  орбит

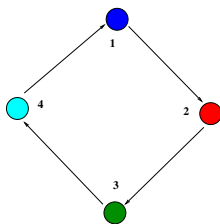


Рис. :  $M$ -орбита

# Эволюция мультистабильности —

как число сосуществующих режимов меняется под действием связей

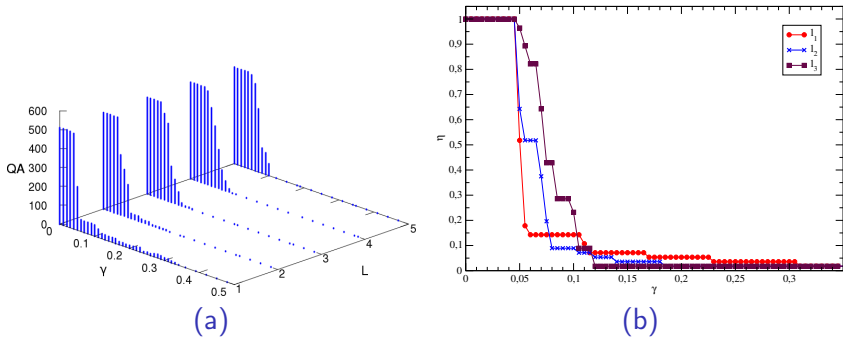


Рис. : Число сосуществующих устойчивых орбит периода два в ансамбле из десяти отображений в зависимости от силы и радиуса связей

# Фазы орбит

Как ввести фазу для дискретной орбиты?

Спектр траектории — эквидистантный набор гармоник с базовой частотой  $f_0 = 1/M$ :

$$F(f) = \sum_{i=0}^{M/2} C_i \delta(f - if_0)$$

где  $\delta(f)$  — дельта-функция,  $C_i$  — комплексная амплитуда  $i$ -ой гармоники ( $i = 1, 2, \dots$ ). Определим *начальную фазу* траектории:

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}(C_1)}{\operatorname{Re}(C_1)} \right)$$

Фазы всех траекторий орбиты связаны соотношением:

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(m)} + 2\pi(k - m)f_0$$

# Фазовые кластеры —

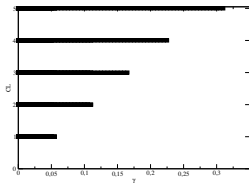
подмножество соседних элементов ансамбля с одинаковыми значениями фаз

- каждое из  $\varphi_i$  кратно  $2\pi f_0$ :  $\varphi_i = 2\pi f_0 s_i$ , где  $s_i = 0, 1, \dots, M - 1$  — целочисленный множитель. Полный набор множителей  $\{s_1, \dots, s_N\}$  идентифицирует пространственную структуру аттрактора —  $MC^{s_1, s_2, \dots, s_N}$
- Кластеру соответствует набор из  $m$  одинаковых идущих подряд индексов:  $s_i = s_{i+1} = \dots = s_{i+m}$ .

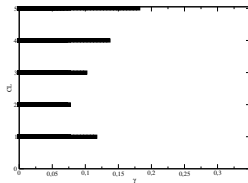


# Влияние длины кластера на «интервал жизни»

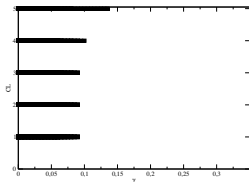
«Разрешенные» длины кластеров



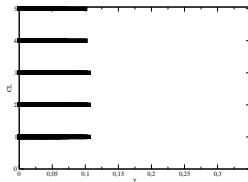
(a)  $L = 1$



(b)  $L = 2$



(c)  $L = 3$



(d)  $L = 5$

Рис. : Длины кластеров (CL), наблюдаемых в ансамбле

*Порядок исчезновения  
кластеров зависит от  
радиуса связей*

*Почему?*

# Сеть как пространственный фильтр

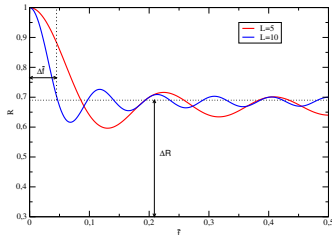
Перепишем уравнение ансамбля в форме:

$$x_i(n + \frac{1}{2}) = f(x_i(n))$$

$$x_i(n + 1) = \sum_{j=-L}^L h_j x_{i+j} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

где  $h_0 = 1 - \gamma$ ,  $h_j = \frac{\gamma}{2L}$   
АЧХ фильтра:

$$1 - \gamma + \frac{\gamma}{L} \sum_{k=1}^L \cos(2\pi k \bar{f})$$



# Связь характеристики фильтра с последовательностью разрушения кластеров

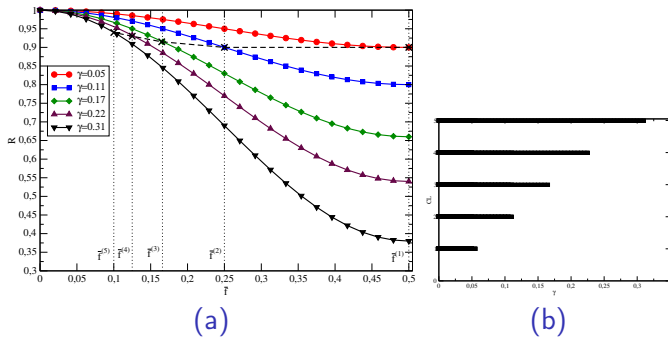


Рис. :  $L = 1$

# Связь характеристики фильтра с последовательностью разрушения кластеров

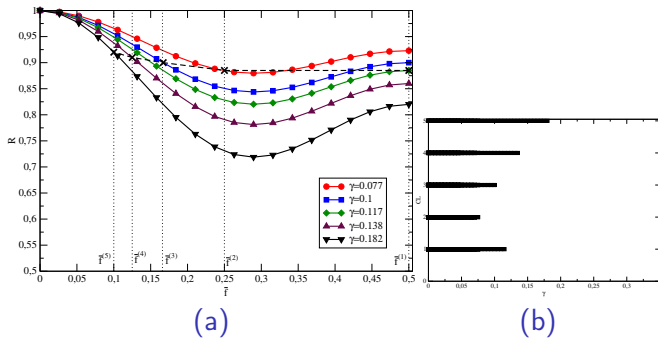


Рис. :  $L = 2$

# Связь характеристики фильтра с последовательностью разрушения кластеров

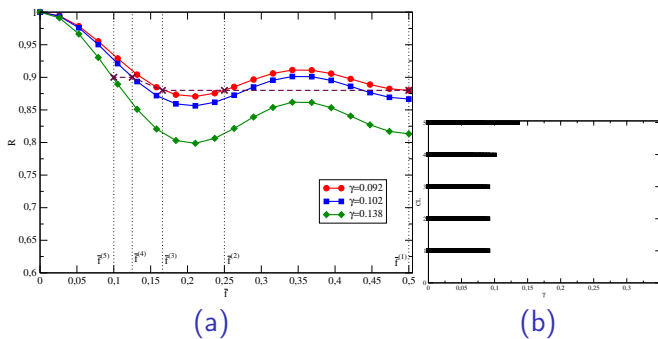


Рис. :  $L = 3$

# Связь характеристики фильтра с последовательностью разрушения кластеров

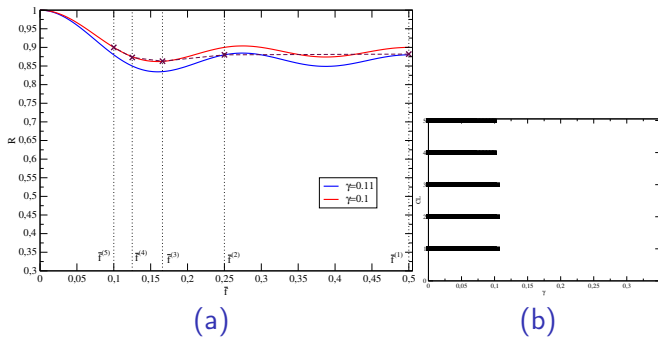


Рис. :  $L = 5$

# Режим глобальной синфазной синхронизации

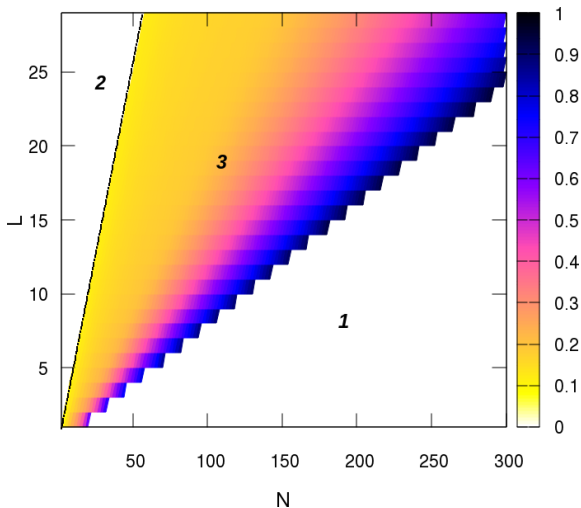


Рис. : Зависимость критического значения  $\gamma$  от  $N$  и  $L$ ; 1 – отсутствие режима глобальной синхронизации, 3 – наличие, 2 – недопустимое значение  $L$

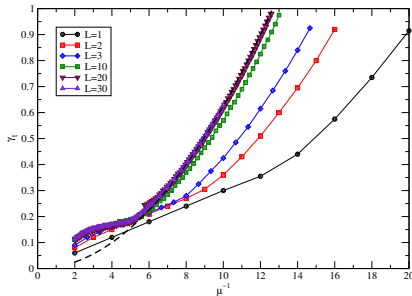


# Оценка критической силы связи для глобальной синхронизации

Минимальное значение связи, при превышении которой все неоднородные режимы неустойчивы

Оценка из формы АЧХ фильтра:

$$\gamma_t = \frac{1 - \xi}{1 - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)} \simeq \frac{3(1 - \xi)}{2\pi^2 \mu^2}, \quad \mu = L/N$$



- Ансамбль отображений с бифуркациями удвоения периода при слабых дальнедействующих связях демонстрирует развитую фазовую мультистабильность. С ростом силы связей, а также радиуса их действия, число сосуществующих состояний монотонно уменьшается и система переходит в режим глобальной синфазной синхронизации
- Порядок “разрушения” кластеров разной длины зависит от радиуса дальнего действия связей
- Для анализа мультистабильности удобно использовать спектральный подход, рассматривая систему связей в качестве цифрового фильтра. Изменение формы АЧХ фильтра с изменением числа и силы связей определяет порядок исчезновения режимов с характерными пространственными кластерами