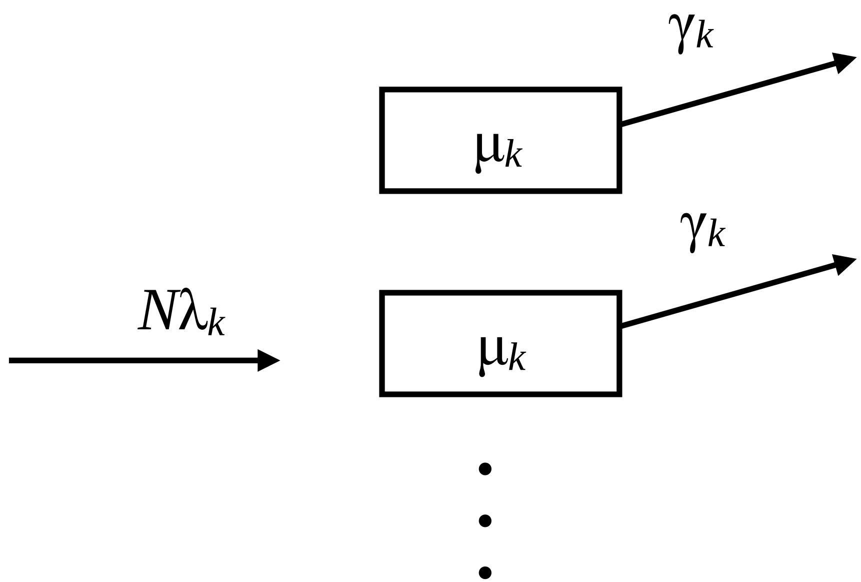
ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ И С УЧЁТОМ ЕДИНОВРЕМЕННЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ

Д.Д. Даммер

Томский государственный университет

Математическая модель в виде СМО



$i(t)$ – число рисков, т.е. заключенных договоров, (занятых приборов) в компании в момент t,

$n(t)$ – число требований на выплату единовременных страховых сумм (произошел страховой случай и выплачивается вся сумма целиком, а не какая-то её часть; клиент покидает компанию),

$k(t)$ – состояние среды.

Описание математической модели

В компанию поступают риски, образуя высокоинтенсивный модулированный пуассоновский поток событий, управляемый цепью Маркова $k(t)$, которая определяется матрицей $N\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик $Nq_{k_1k_2}$, $k_1 = 1...K$, $k_2 = 1...K$.

Определим диагональные матрицы

$$N\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} N\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N\lambda_2 & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & N\lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & ..... \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & \mu_K \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $N\lambda_k$ – это интенсивность поступления рисков в компанию, когда цепь Маркова находится в состоянии k, N – параметр высокой интенсивности потока, λ_k – фиксированная величина,

γ_k – интенсивность требований на выплату единовр. стр. сумм,

μ_k – интенсивность, с которой риски покидают компанию после окончания действия договора, k=1…K.

Постановка задачи

Обозначим $\{i(t), n(t), k(t)\}$ трехмерный процесс, распределение вероятностей его значений

$$P_k(i,n,t) = P\{i(t) = i,\ n(t) = n,\ k(t) = k\} \ -$$

вероятность того, что в момент времени t в страховой компании находится i застрахованных рисков, число требований на выплату единовременных страхованных сумм к этому же моменту составило n, среда находится в состоянии k.

Задача состоит в том, чтобы найти характеристическую

функцию исследуемых процессов.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_k(i,n,t)}{\partial t} = -P_k(i,n,t)\left(N\lambda_k + i\mu_k + i\gamma_k\right) + P_k(i-1,n,t)N\lambda_k +$$

$$+P_k(i+1,n,t)(i+1)\mu_k + P_k(i+1,n-1,t)(i+1)\gamma_k + \sum_{\nu=1}^{K} P_\nu(i,n,t)Nq_{\nu k}, \qquad (2)$$

$$k = 1 \ldots . K$$

Решение задачи

Введем частичные характеристические функции

$$H_k\left(u_1,u_2,t\right)=\sum_{i,n=0}^{\infty}e^{ju_1 i}e^{ju_2 n}P_k\left(i,n,t\right),\quad k=1....K, \qquad (3)$$

j – мнимая единица.

Определим векторную характеристическую функцию

$$\mathbf{H}\left(u_1,u_2,t\right)=\left\{H_1\left(u_1,u_2,t\right),H_2\left(u_1,u_2,t\right),....,H_K\left(u_1,u_2,t\right)\right\} \qquad (4)$$

Перейдем от системы (2) сначала к системе уравнений относительно функций (3), а затем к дифференциальному уравнению относительно векторной характеристической функции (4).

Дифференциальное уравнение для $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = j\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial u_1}\left[\left(1-e^{-ju_1}\right)\mathbf{M}+\left(1-e^{-j(u_1-u_2)}\right)\mathbf{\Gamma}\right]+$$

$$+\mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[N\mathbf{\Lambda}\left(e^{ju_1}-1\right)+N\mathbf{Q}\right], \qquad (5)$$

где матрицы $N\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{M}$ определяются (1)

$N\mathbf{Q}$ – матрица инфинитезимальных характеристик.

Теперь задача свелась к нахождению выражения для функции $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$.

Будем использовать метод ***асимптотического анализа*** в предельном условии ***высокой интенсивности потока входящих рисков и предельно частых изменений состояний среды, т.е.*** $N \to \infty$

Асимптотический анализ первого порядка

В уравнении (5) выполним замены:

$$\varepsilon = \frac{1}{N},\ u_1 = \varepsilon w_1, u_2 = \varepsilon w_2,\ \mathbf{H}\left(u_1, u_2, t\right) = \mathbf{F}\left(w_1, w_2, t, \varepsilon\right):$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}\left(w_1, w_2, t, \varepsilon\right)}{\partial t} = j \frac{\partial \mathbf{F}\left(w_1, w_2, t, \varepsilon\right)}{\partial w_1}\left[\left(1 - e^{-jw_1\varepsilon}\right)\mathbf{M} + \left(1 - e^{-j(w_1 - w_2)\varepsilon}\right)\mathbf{\Gamma}\right] +$$

$$+\mathbf{F}\left(w_1, w_2, t, \varepsilon\right)\left[\mathbf{\Lambda}\left(e^{jw_1\varepsilon} - 1\right) + \mathbf{Q}\right]. \qquad (6)$$

Обозначим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{F}\left(w_1, w_2, t, \varepsilon\right) = \mathbf{F}\left(w_1, w_2, t\right) -$

эту функцию мы будем называть асимптотическим решением уравнения (6).

В уравнении (6) совершим предельный переход $\varepsilon \to 0$,

получим

$$\mathbf{F}(w_1, w_2, t)\mathbf{Q} = 0. \tag{7}$$

Решение системы (7) имеет вид

$$\mathbf{F}(w_1, w_2, t) = \mathbf{R}\Phi(w_1, w_2, t), \tag{8}$$

где $\Phi(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция,

R – вектор стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова ,

определяемый системой уравнений **RQ**=0 и

условием нормировки **RE**=1,

E– единичный вектор-столбец размерности K.

Чтобы найти функцию $\Phi(w_1, w_2, t)$ просуммируем уравнения системы (6) (умножим справа на вектор **E**), с учетом (7), (8) получим уравнение:

$$\frac{\partial \Phi(w_1, w_2, t)}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial \Phi(w_1, w_2, t)}{\partial w_1} \kappa_1 - (w_1 - w_2) \frac{\partial \Phi(w_1, w_2, t)}{\partial w_1} \kappa_2 +$$

$$+ j w_1 \Phi(w_1, w_2, t) \kappa, \qquad (9)$$

с начальным условием $\Phi(w_1, w_2, 0) = \Phi(w_1) = \exp\left\{ j \frac{\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2} w_1 \right\}.$

Решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$\Phi(w_1, w_2, t) = \exp\left\{ j \frac{\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2} w_1 + j \frac{\kappa \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} w_2 t \right\}, \qquad (10)$$

где $\kappa = \mathbf{R\Lambda E}$, $\kappa_1 = \mathbf{RME}$, $\kappa_2 = \mathbf{R\Gamma E}$.

Асимптотический анализ второго порядка

Определим векторную функцию $\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)$:

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)\exp\left\{j\frac{N\kappa}{\kappa_1+\kappa_2}u_1+j\frac{N\kappa\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}u_2t\right\} \qquad (11)$$

Подставим это выражение в (5), получим уравнение относительно функции $\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)$, в нем выполним замены:

$$\varepsilon=\frac{1}{N^2},\ u_1=\varepsilon w_1,\ u_2=\varepsilon w_2,\ \mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)=\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t,\varepsilon)$$

и получим уравнение относительно функции $\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t,\varepsilon)$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial w_1}\left[\left(1 - e^{-jw_1\varepsilon}\right)\mathbf{M} + \left(1 - e^{-j(w_1 - w_2)\varepsilon}\right)\mathbf{\Gamma}\right] +$$

$$+\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t, \varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}\left(e^{jw_1\varepsilon} - 1\right) + \mathbf{Q}\right] - \qquad (12)$$

$$-\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t, \varepsilon)\left[jw_2\varepsilon \frac{\kappa\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\mathbf{I} + \frac{\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2}\left(\left(1 - e^{-jw_1\varepsilon}\right)\mathbf{M} + \left(1 - e^{-j(w_1 - w_2)\varepsilon}\right)\mathbf{\Gamma}\right)\right]$$

Обозначим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{F_2}(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \mathbf{F_2}(w_1, w_2, t)$,

эту функцию мы будем называть асимптотическим решением уравнения (12).

В (12) $\varepsilon \to 0$, получим $\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t)\mathbf{Q} = 0$, тогда

$$\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t) = \mathbf{R}\varPhi_2(w_1, w_2, t), \qquad (13)$$

$\varPhi_2(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция.

,

Решение уравнения (12) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F_2}\left(w_1, w_2, t, \varepsilon\right) = \Phi_2\left(w_1, w_2, t\right)\left(\mathbf{R} + jw_1\varepsilon\mathbf{f_1} + jw_2\varepsilon\mathbf{f_2} + O\left(\varepsilon^2\right)\right),$$

где неизвестные веуторы $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ определяются решением системы

$$\mathbf{f_1Q} = \frac{\kappa\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2}\mathbf{RM} + \frac{\kappa\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\mathbf{R\Gamma} - \mathbf{R\Lambda},$$

$$\mathbf{f_2Q} = \frac{\kappa\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\mathbf{R} - \frac{\kappa}{\kappa_1+\kappa_2}\mathbf{R\Gamma}. \qquad (14)$$

Уравнение относительно неизвестной функции $\Phi_2(w_1, w_2, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t)}{\partial w_1}\left(w_1(\kappa_1+\kappa_2) - w_2\kappa_2\right) = \Phi_2(w_1, w_2, t)\times \tag{15}$$

$$\times\left(w_1^{\,2}\left(\mathbf{f_1A_1}-\kappa\right) + w_2^{\,2}\left(\mathbf{f_2A}_2 - \frac{\kappa\kappa_2}{2(\kappa_1+\kappa_2)}\right) + w_1w_2\left(\mathbf{f_2A_1}+\mathbf{f_1A_2}+\frac{\kappa\kappa_2}{(\kappa_1+\kappa_2)}\right)\right),$$

где $\mathbf{A}_1 = \left(\frac{\kappa}{\kappa_1+\kappa_2}(\mathbf{M}+\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_2 = \left(\frac{\kappa\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\mathbf{I} - \frac{\kappa}{\kappa_1+\kappa_2}\mathbf{\Gamma}\right)\mathbf{E}$,

матрицы **M, Γ, Λ** - определены выше,

I - единичная матрица и **E** - единичный вектор стобец размерности K.

Решение дифференциального уравнения (15) будем искать в виде

$$\Phi_2\left(w_1, w_2, t\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(K_{11} w_1{}^2 + 2K_{12}\left(t\right) w_1 w_2 + K_{22}\left(t\right) w_2{}^2\right)\right\} \quad (16)$$

$K_{11}, K_{22}\left(t\right)$ – дисперсии процессов $i(t), n(t)$ соответственно,

$K_{12}\left(t\right)$ – ковариация процессов $i(t), n(t)$.

Подставим предполагаемое решение (16) в уравнение (15), и с учетом условий $K_{12}\left(0\right) = 0, K_{22}\left(0\right) = 0$ получим выражения для неизвестных K_{11}, $K_{12}(t)$, $K_{22}\left(t\right)$:

$$K_{11} = \frac{\kappa - \mathbf{f_1 A_1}}{\kappa_1 + \kappa_2}, \qquad K_{12}\left(t\right) = D\left(1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t}\right),$$

$$K_{22}(t) = 2\kappa_2 D\left[t - \frac{1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t}}{\kappa_1 + \kappa_2}\right] - 2\mathbf{f_2 A_2} t + \frac{\kappa\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} t,$$

где $D = \dfrac{K_{11}\kappa_2 - \mathbf{f_2 A_1} - \mathbf{f_1 A_2} - \kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}.$

Результаты исследования модели

Теперь можем записать выражение сначала для функции $F_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)$, а затем, выполнив обратные замены, получим, что при достаточно больших N имеет место аппроксимация

$$H\left(u_1, u_2, t\right) \approx \mathbf{R}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(K_{11}\left(Nu_1\right)^2 + 2K_{12}\left(t\right)N^2u_1u_2 + K_{22}\left(t\right)\left(Nu_2\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + j\frac{N\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2}u_1 + j\frac{N\kappa\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}u_2 t\right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция $h\left(u_1, u_2, t\right) = H\left(u_1, u_2, t\right)\mathbf{E}$ двумерного процесса числа застрахованных в компании рисков и числа требований на выплату единовременных страховых сумм в указанных выше предельных условиях имеет вид двумерной характеристической функции гауссовского распределения. Полученные результаты могут быть полезны для анализа деятельности страховых компаний.

Спасибо за внимание!