# Анализ открытых экспоненциальных сетей массового обслуживания с динамическим управлением входящими потоками требований, поступающими из нескольких источников

Рогачко Е. С., Долгов В. И.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

# Управление в сетях массового обслуживания

- Оптимальное управление:

  - *Hsiao M. T., Lazar A. A.* Optimal decentralized flow control of Markovian queueing networks with multiple controllers // Performance Evaluation. — 1991. — Vol. 13, № 3. — P. 181–204.
  - *Bretthauer K. M.* Optimal service and arrival rates in Jackson queueing networks // Naval Research Logistics. — 2000. — Vol. 47, № 1. — P. 1–17.
  - *Chen S., Xia L.* Optimal control of admission prices and service rates in open queueing networks // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — Vol. 50, № 1. — P. 928–933.

- Динамическое управление:

  - *Долгов В. И., Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С.* Метод анализа сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, вып. 3. — С. 22–27.

# Описание сети

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания:

- $L$ систем массового обслуживания $S_i$ типа $M/M/1$ с интенсивностями обслуживания $\mu_i$, $i = 1, \ldots, L$;
- $K$ источников требований $S_{0k}$, $k = 1, \ldots, K$; интенсивность пуассоновского потока требований $\lambda_{0k} \in \{\lambda'_{0k}, \lambda''_{0k}\}$, где $\lambda'_{0k} < \lambda''_{0k}$.

Вектор $\delta = (\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0K})$ — *стратегия управления*; $\delta \in \Delta$.

# Описание сети

Для синхронизации управления интенсивностями входящих потоков введем последовательность *интервалов времени фиксированной длительности* $\varphi$.

В момент окончания очередного интервала времени $\varphi$:

- определяется оценка $\Pr\{\tau_k(\delta) \geq \tau_k^*\}$, $k = 1, \ldots, K$, где $\tau_k(\delta)$ — длительность реакции сети для требований из источника $S_{0k}$ при стратегии управления $\delta$, $\tau_k^*$ — заданная максимальная длительность реакции сети для требований из источника $S_{0k}$;
- если $\Pr\{\tau_k(\delta) \geq \tau_k^*\} \geq 1 - \gamma$, где $\gamma$ — заданная вероятность, то в течение следующего интервала времени $\lambda_{0k} = \lambda'_{0k}$, иначе в течение следующего интервала времени $\lambda_{0k} = \lambda''_{0k}$.

# Метод анализа сети. Этап 1

**Этап 1.** Для каждой стратегии управления $\delta \in \Delta$ определяем стационарные характеристики сети.

**1.1.** Вычисляем интенсивности входящих потоков $\lambda_{ik}$ в системы сети, $i = 1, \ldots, L$, $k = 1, \ldots, K$.

**1.2.** Вычисляем стационарные характеристики системы $S_i$, $i = 1, \ldots, L$:

- коэффициент использования системы
$$\psi_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i},$$
где $\lambda_i = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{ik}$;
- математическое ожидание (м. о.) числа требований в системе
$$\bar{n}_i = \frac{\psi_i}{1-\psi_i}.$$

**1.3.** Вычисляем стационарные характеристики сети:

- м. о. длительности реакции сети для требований из источника $S_{0k}$, $k = 1, \ldots, K$,

  $$\bar{\tau}_k(\delta) = \frac{1}{\lambda_{0k}} \sum_{i=1}^{L} \bar{n}_i p_{ik},$$

  где $p_{ik} = \lambda_{ik}/\lambda_i$;

- пропускная способность сети для требований из источника $S_{0k}$, $k = 1, \ldots, K$,

  $$\Lambda_k(\delta) = \sum_{i=1}^{L} \lambda_{ik}.$$

# Метод анализа сети. Этап 2

**Этап 2.** Находим стационарное распределение случайного процесса $\Xi$ перехода сети между состояниями, соответствующими разным стратегиям управления $\delta$.

- Процесс $\Xi$ — цепь Маркова с дискретным временем и множеством состояний $\Delta$.
- Матрица вероятностей перехода цепи $P = (p(\delta^n, \delta^m))$:

$$p(\delta^n, \delta^m) = \prod_{k=1}^{K} p_k(\delta^n, \delta^m),\ \delta^n, \delta^m \in \Delta,$$

$$p_k(\delta^n, \delta^m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Pr\{\tau_k(\delta^n) \geq \tau_k^*\} \geq 1-\gamma,\ \delta_k^m = \lambda'_{0k}; \\ 1, & \text{если } \Pr\{\tau_k(\delta^n) \geq \tau_k^*\} < 1-\gamma,\ \delta_k^m = \lambda''_{0k}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для вычисления вероятности $\Pr\{\tau_k(\delta^n) \geq \tau_k^*\}$ находим функцию распределения случайной величины $\tau_k(\delta^n)$.

# Метод анализа сети. Этап 2

Функция распределения случайной величины $\tau_k(\delta)$:

$$F(t) = \Pr\{\tau_k(\delta) < t\} =$$
$$1 - \left(\frac{a_2}{a_2 - a_1}\right)^{d-1} e^{-a_1 t} + \frac{a_1}{a_2} e^{-a_2 t} \sum_{l=0}^{d-2} \left[\left(\frac{a_2}{a_2 - a_1}\right)^{d-1-l} \sum_{s=0}^{l} \frac{(a_2 t)^s}{s!}\right],$$

где $d = \lceil 1/C^2_{\tau_k}(\delta) \rceil$,
$\bar{\tau}_k(\delta)$ и $C^2_{\tau_k}(\delta)$ — м. о. и квадрат коэффициента вариации $\tau_k(\delta)$,

$$a_1 = d\left[\bar{\tau}_k(\delta)\left(1 + \sqrt{(C^2_{\tau_k}(\delta)d - 1)(d-1)}\right)\right]^{-1},$$
$$a_2 = d\left[\bar{\tau}_k(\delta)\left(1 - \sqrt{(C^2_{\tau_k}(\delta)d - 1)/(d-1)}\right)\right]^{-1}.$$

- Стационарное распределение $\pi = (\pi(\delta))$, $\delta \in \Delta$, цепи $\Xi$ является решением уравнения $\pi = \pi P$.

# Метод анализа сети. Этап 3

**Этап 3.** Вычисляем стационарные характеристики сети с управлением входящими потоками требований.

$$\bar{\tau}_k^c = \sum_{\delta \in \Delta} \pi(\delta) \bar{\tau}_k(\delta),$$

$$\Lambda_k^c = \sum_{\delta \in \Delta} \pi(\delta) \Lambda_k(\delta), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования показывает приемлемую для практических приложений точность предложенного метода анализа сетей с управлением.

# Основные результаты работы

- предложен метод управления входящими потоками требований, поступающими в открытую сеть массового обслуживания из нескольких источников;
- разработан метод анализа сети массового обслуживания с управлением;
- проведено сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования сети массового обслуживания с управлением.

Спасибо за внимание!