ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ #

#

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ ВИДА MMPP(A(X))/A(CX)/∞

Сеченова Софья Алексеевна
Бушкова Татьяна Владимировна

Национальный исследовательский Томский государственный университет

АКТУАЛЬНОСТЬ И СТЕПЕНЬ РАЗРАБОТАННОСТИ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Э.Л. Ромм и В. В. Скитович //Об одном обобщении задачи Эрланга/ Автоматика и телемеханика. – 1971. – №6. – С. 164 – 168.

Бочаров Павел Петрович – доктор техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, лауреат Премии Правительства РФ (с 1977 г.).

Наумов Валерий Арсеньевич – кандидат физ. – мат. наук, доцент исследовательского центра процессов обслуживания г. Хельсинки, Финляндия (с 1977 г.).

Тихоненко Олег Михайлович – доктор техн. наук, профессор CardinalStefanWyszyńskiUniversityinWarsaw, Poland.

Печинкин Александр Владимирович – лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники, доктор физ. – мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИПИ РАН (с 1990 г.).

Самуйлов Константин Евгеньевич – доктор техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей, профессор Российского университета дружбы народов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕСУРСНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВИДА МОМЕНТОВ

M|GI|∞ МЕТОДОМ

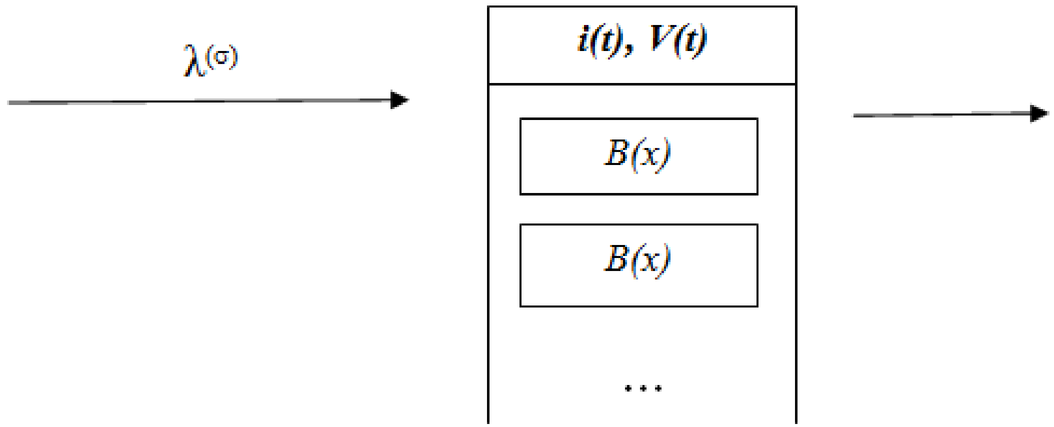

Рисунок 1 – Система массового обслуживания $M^{(\sigma)}|GI|\infty$

Время обслуживания – с.в. ξ с ф.р. $B(x)$.
Объем требования – с.в. $\sigma = \xi/C$ с ф.р. $A(x) = P\{\sigma < x\} = P\{\xi < Cx\} = B(Cx)$.
$i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t.
$K(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.

Метод просеянного потока

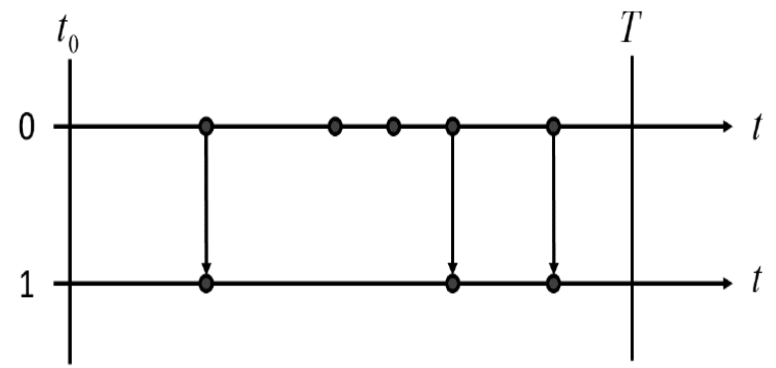

Рисунок 2 – Просеивание входящего потока бесконечнолинейной системы массового обслуживания

Заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t<T$, с вероятностью $S(t) = 1–B(T–t)$ формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 – S(t)$ эта заявка не рассматривается.

$n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t.

$V(t)$ –суммарный объем просеянных заявок к моменту времени t.

Если в начальный момент $t_0 < T$система была свободна, то для момента времени T для любых неотрицательныхmи vвыполняется равенство $P\{i(T) = m, K(T) < v\} = P\{n(T) = m, V(T) < v\}$.

$P(n,z,t) = P\{n(t) = n, V(t) < z\}$ – распределение вероятностей двумерного Марковского процесса.

Для этого распределения запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t} = \lambda S(t)\left[\int_0^z P(n-1,z-y,t)dA(y) - P(n,z,t)\right]. \tag{1}$$

Введем характеристическую функцию вида

$$H(u_1,u_2,t) = M\left\{\exp\left(ju_1 n(t) + ju_2 V(t)\right)\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_1 n}\int_0^{\infty} e^{ju_2 z}P(n,z,t)dz. \tag{2}$$

Учитывая $A(y) = P\{\sigma < y\} = P\{\xi < Cy\} = B(Cy)$ и сделав замену $Cy = t$, система (1) перепишется в виде

$$\frac{\partial H(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \lambda S(t)H(u_1,u_2,t)\left[e^{ju_1}B^*\left(\frac{u_2}{C}\right) - 1\right]. \tag{3}$$

При $t = T$ для характеристической функции двумерного процесса в стационарном режиме имеет вид

$$H\left(u_1,u_2\right)=\exp\left\{\lambda b_1\left[e^{ju_1}B^*\left(\frac{u_2}{C}\right)-1\right]\right\}. \qquad (4)$$

Откуда для числа заявок в системе в стационарном режиме получим

$$h_1(u_1)=M\left\{e^{ju_1 i(T)}\right\}=\exp\left\{\lambda b_1\left[e^{ju_1}-1\right]\right\}, \qquad (5)$$

для объема занимаемых ресурсов в стационарном режиме запишем

$$h_2(u_2)=M\left\{e^{ju_2 K(T)}\right\}=\exp\left\{\lambda b_1\left[B^*\left(\frac{u_2}{C}\right)-1\right]\right\}. \qquad (6)$$

Нахождение моментов различных порядков числа занятых приборов и полной суммы объемов требований в системе M|GI|∞

Первый начальный момент и дисперсия для процесса $i(t)$ имеют вид:

$$M\{i\} = D\{i\} = \lambda b_1. \tag{7}$$

Теорема 1. *Первый начальный момент и дисперсия для процесса $K(t)$ имеет вид*

$$M\{K\} = \frac{\lambda b_1^2}{C}, D\{K\} = \frac{\lambda b_1 b_2}{C^2}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Смешанный момент для числа заявок, находящихся в системе, и полной суммы объемов требований имеет вид*

$$M\{i, K\} = \frac{\lambda^2 b_1^3 + \lambda b_1^2}{C}. \tag{9}$$

Коэффициент корреляции равен

$$r_{iK} = \frac{\dfrac{\lambda^2 b_1^3 + \lambda b_1^2}{C} - \dfrac{\lambda^2 b_1^3}{C}}{\sqrt{\dfrac{\lambda^2 b_1^2 b_2}{C^2}}} = \frac{b_1}{\sqrt{b_2}}. \tag{10}$$

# #

#

Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания вида MMPP|GI|∞ с пропорциональным объему временем обслуживания

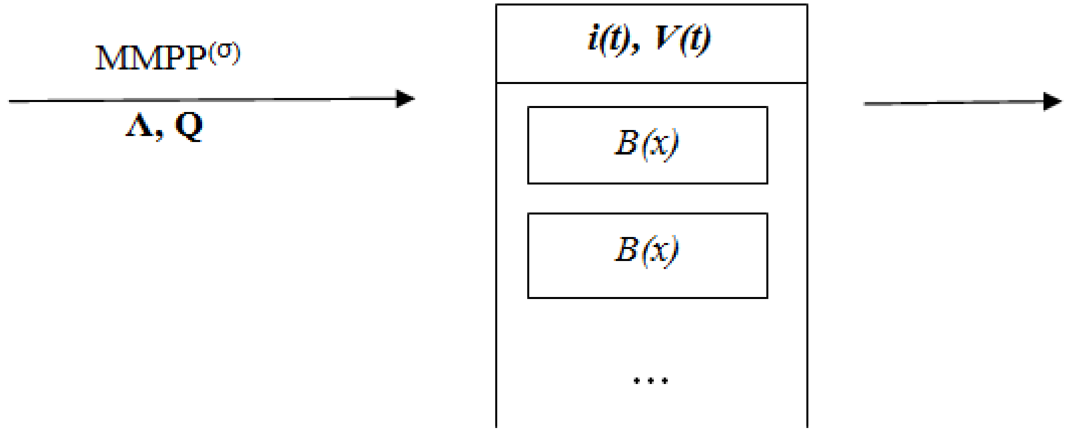

Рисунок 7 – Система массового обслуживания MMPP$^{(\sigma)}$|GI|∞ с пропорциональным объему временем обслуживания

Время обслуживания – с.в.ξ с ф.р. $B(x)$.
Объем требования – с.в. $\sigma = \xi/C$ с ф.р.$A(x) = P\{\sigma<x\} = P\{\xi<Cx\} = B(Cx)$.
$i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t.
$K(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.

Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания вида MMPP|GI|∞ с пропорциональным объему временем обслуживания

$P(k,n,z,t) = P\{k(t) = k,\ n(t) = n, V(t) < z\}$– распределение вероятностей трехмерного Марковского процесса.

Для этого распределения запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial t} = \lambda_k S(t)\left[\int\limits_0^z P(k,n-1,z-y,t)dA(y) - P(k,n,z,t)\right] + \sum_\nu q_{\nu k}\Delta t P(\nu,n,z,t). \qquad (11)$$

Введем частичные характеристические функции вида:

$$H(k,u_1,u_2,t) = M\left\{\exp\left(ju_1 n(t) + ju_2 V(t)\right)\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_1 n}\int\limits_0^{\infty} e^{ju_2 z} P(k,n,z,t)\,dz. \qquad (12)$$

Учитывая $A(y)=P\{\sigma<y\} = P\{\xi<Cy\} = B(Cy)$ и сделав замену $Cy = t$, система (11) перепишется в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda} S(t)\left(e^{ju_1}B^*\left(\frac{u_2}{C}\right) - 1\right) + \mathbf{Q}\right] \qquad (13)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0) = \mathbf{R}.$$

Асимптотика первого порядка

Обозначим $\frac{1}{b_1}=\varepsilon$ и выполним замены в задаче (13)

$$\varepsilon t=\tau,\; S(t)=S_1(\tau),\; u_1=\varepsilon x_1,\; u_2=\varepsilon x_2,\; \mathbf{H}(u_1,u_2,t)=F_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon).$$

Тогда рассматриваемая задача примет вид

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F_1}(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\mathbf{F_1}(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}S_1(\tau)\left(e^{j\varepsilon x_1}B^*\left(\frac{\varepsilon x_2}{C}\right)-1\right)+\mathbf{Q}\right] \tag{21}$$

с начальным условием

$$\mathbf{F_1}(x_1,x_2,\tau_0,\varepsilon)=\mathbf{R}.$$

Теорема 5. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ *уравнения* (21) *имеет вид*

$$\mathbf{F_1}(x_1,x_2,\tau)=\mathbf{R}\exp\left\{j\kappa_1\left(x_1+\frac{x_2}{C}b_1\right)\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(v)dv\right\}, \tag{22}$$

где $\kappa_1=\mathbf{R\Lambda E}$.

Сделав обратную замену, получим функцию

$$h^{(1)}\left(u_1,u_2,t\right)=\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1+\frac{u_2}{C}b_1\right)\int_{t_0}^{T}(1-B(T-v))dv\right\}.$$

При $t = T$, $t_0 \to -\infty$ и в силу того, что $P\{i(T) = m, K(T) < v\} = P\{n(T) = m, V(T) < v\}$ выполняется равенство

$$h^{(1)}\left(u_1,u_2\right)=\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1 b_1+\frac{u_2}{C}b_1^2\right)\right\}, \tag{23}$$

где $b_1=\int_{-\infty}^{T}S(v)dv=\int_{-\infty}^{T}(1-B(T-t))dt=\int_{0}^{\infty}(1-B(t))dt.$

Асимптотика второго порядка

В задаче (13) выполним замену

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1+\frac{u_2}{C}b_1\right)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S(v)dv\right\},\tag{24}$$

получим

$$\frac{\partial\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda}S(t)\left(e^{ju_1}B^*\left(\frac{u_2}{C}\right)-1\right)-j\kappa_1\left(u_1+\frac{u_2}{C}b_1\right)S(t)\mathbf{I}+\mathbf{Q}\right].\tag{25}$$

Обозначим $\frac{1}{b_1}=\varepsilon^2$ и выполним замены

$$\varepsilon^2 t=\tau,\ S(t)=S_1(\tau),\ u_1=\varepsilon x_1,\ u_2=\varepsilon x_2,\ \mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)=\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon).$$

Тогда рассматриваемая задача примет вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}S_1(\tau)\left(e^{j\varepsilon x_1}B^*\left(\frac{\varepsilon x_2}{C}\right)-1\right)-\right.\tag{26}$$

$$\left.-j\kappa_1\left(\varepsilon x_1+\frac{\varepsilon x_2}{C}b_1\right)S_1(t)\mathbf{I}+\mathbf{Q}\right].$$

Метод асимптотического анализа в системе MMPP|GI|∞

#

Теорема 6. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_2\left(x_1,x_2,\tau\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_2\left(x_1,x_2,\tau,\varepsilon\right)$ *уравнения* (26) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_1\left(x_1,x_2,\tau\right)=\mathrm{R}\exp\left\{\frac{(jx_1)^2}{2}\left(\kappa_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz+\kappa_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz\right)+\right. \tag{27}$$

$$\left.+\frac{(jx_2)^2}{2C^2}\left(\kappa_1 b_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz+\kappa_2 b_1^2\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz\right)+jx_1 j\frac{x_2}{C}\left(\kappa_1 b_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz+\kappa_2 b_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz\right)\right\},$$

где $\kappa_2=2\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{E}$, $b_2=\int\limits_0^{\infty}t^2dB(t)$, *а вектор* $\mathbf{f}_2$ *является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases}\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+\mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)=0,\\ \mathbf{f}_2\mathrm{E}=0.\end{cases}$$

#

Метод асимптотического анализа в системе MMPP|GI|∞

Сделав обратную замену, получим

$$h^{(2)}\left(u_1,u_2,t\right)=\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1+\frac{u_2}{C}b_1\right)\int\limits_{t_0}^{T}S(z)dz+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1\int\limits_{t_0}^{T}S(z)dz+\kappa_2\int\limits_{t_0}^{T}S^2(z)dz\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2C^2}\left(\kappa_1 b_2\int\limits_{t_0}^{T}S_1(z)dz+\kappa_2 b_1^2\int\limits_{t_0}^{T}S_1^2(z)dz\right)+ju_1 j\frac{u_2}{C}\left(\kappa_1 b_1\int\limits_{t_0}^{T}S_1(z)dz+\kappa_2 b_1\int\limits_{t_0}^{T}S_1^2(z)dz\right)\right\}, \tag{28}$$

При $t = T$, $t_0 \to -\infty$ и в силу того, что $P\{i(T) = m,\ V(T) < v\} = P\{n(T) = m,\ V(T) < v\}$ выполняется равенство

$$h^{(2)}\left(u_1,u_2\right)=\exp\left\{j\kappa_1 b_1\left(u_1+\frac{u_2}{C}b_1\right)+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1 b_1+\kappa_2\beta\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2C^2}\left(\kappa_1 b_2 b_1+\kappa_2 b_1^2\beta\right)+ju_1 j\frac{u_2}{C}\left(\kappa_1 b_1^2+\kappa_2 b_1\beta\right)\right\}. \tag{29}$$

Метод асимптотического анализа в системе MMPP|GI|∞

Таким образом, асимптотическая характеристическая функция для числа заявок, находящихся в системе, в стационарном режиме имеет вид

$$h_i^{(2)}\left(u\right)=\exp\left\{j\kappa_1 b_1 u+\frac{(ju)^2}{2}\left(\kappa_1 b_1+\kappa_2\beta\right)\right\}. \tag{30}$$

Асимптотическая характеристическая функция полной суммы объемов требований в стационарном режиме имеет вид

$$h_V^{(2)}(u)=\exp\left\{j\kappa_1 b_1^2\frac{u}{C}+\frac{(ju_2)^2}{2C^2}\left(\kappa_1 b_2 b_1+\kappa_2 b_1^2\beta\right)\right\}, \tag{31}$$

где $b_1=\int\limits_0^\infty(1-B(t))dt,\ b_2=\int\limits_0^\infty t^2dB(t),\ \beta=\int\limits_0^\infty(1-B(t))^2dt.$

Численный пример

Пусть на вход системы поступает марковский модулированный поток (ММРР-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик и диагональной матрицей условных интенсивностей

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & -0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & -0.8 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что время обслуживания распределено равномерно на интервале [0,2N], а объемы требований имеют равномерное распределение на интервале [0,N].

Национальный
исследовательский
Томский
государственный
университет

Численный пример

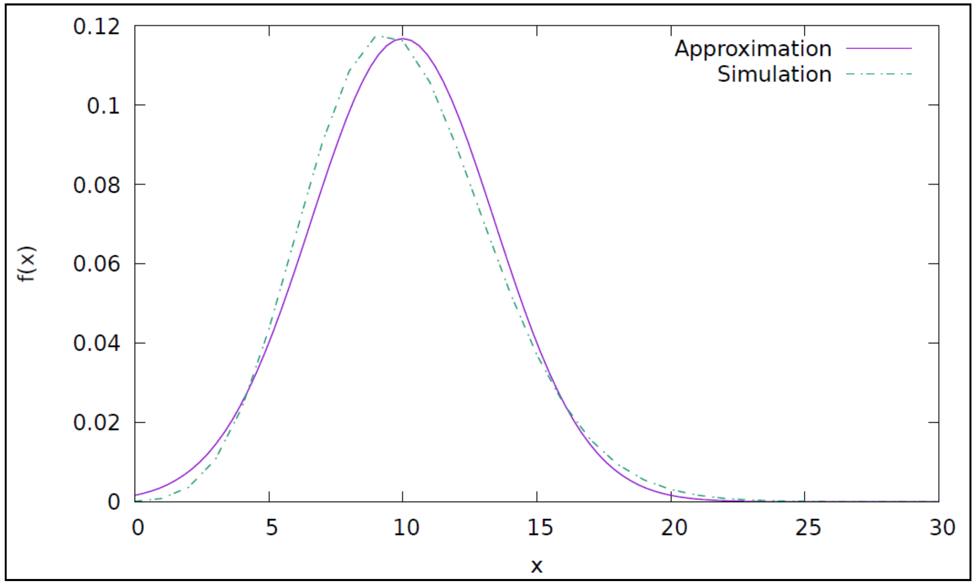

Рисунок 8 – Асимптотический и эмпирический ряды распределения вероятностей для числа заявок, находящихся в системе, при N=10

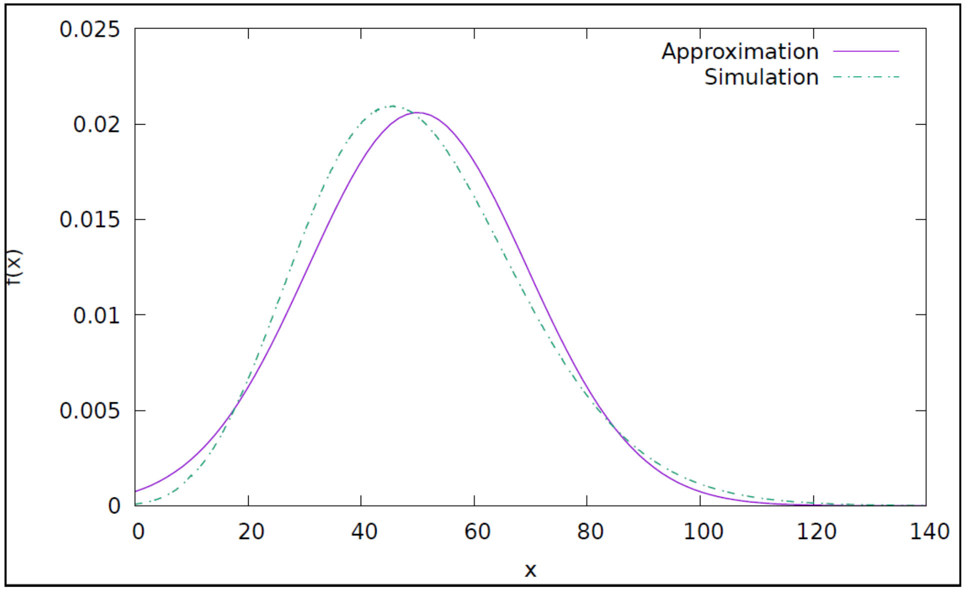

Рисунок 9 – Асимптотическая и эмпирическая плотности распределения вероятностей для полной суммы объемов требований при N=10

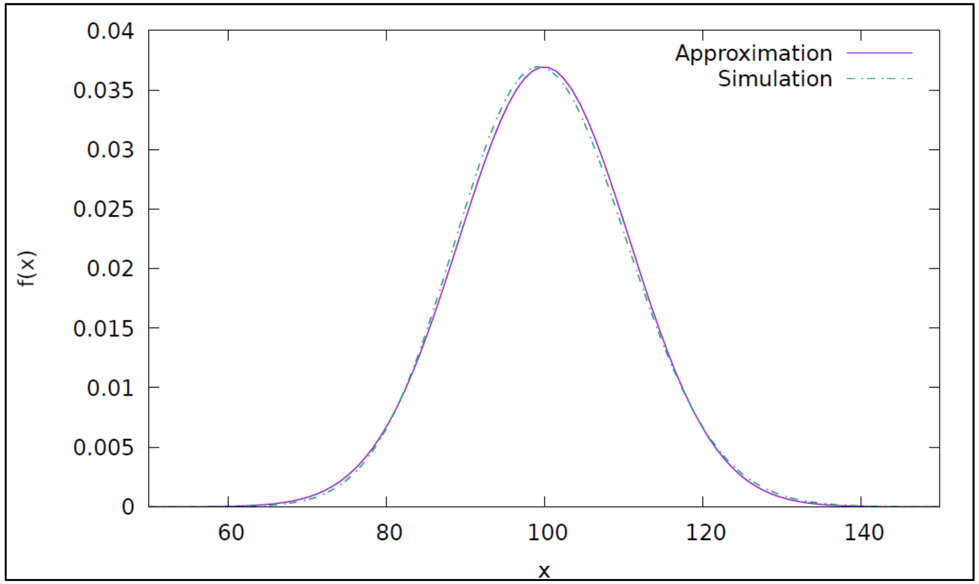

Рисунок 10 – Асимптотический и эмпирический ряды распределения вероятностей для числа заявок, находящихся в системе, при N=100

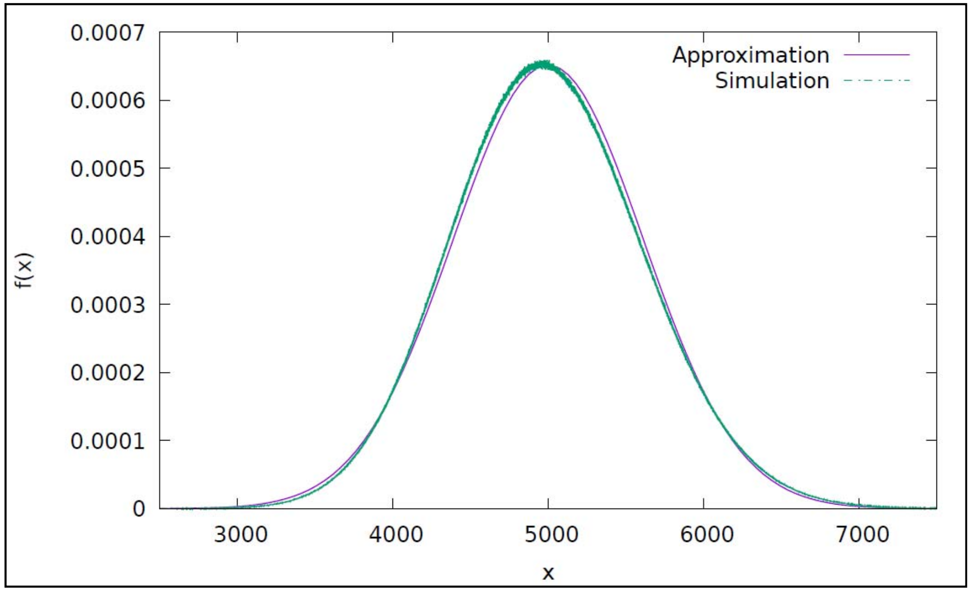

Рисунок 11 – Асимптотическая и эмпирическая плотности распределения вероятностей для полной суммы объемов требований при N=100

Таблица 1 – Расстояние Колмогорова между эмпирической и гауссовской функциями распределения вероятностей для числа заявок, находящихся в системе

N	1	10	100
Δ	0,265	0,039	0,012

Таблица 2 – Расстояние Колмогорова между эмпирической и гауссовской функциями распределения вероятностей для полной суммы объемов требований

N	1	10	100
Δ	0,358	0,033	0,009

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!