Сеть массового обслуживания с нестационарной структурой и восстановлением по событию

И.Е. Тананко, Н.П. Фокина

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского, г. Саратов, Россия

Постановка задачи

Основные обозначения:

Г – однородная открытая сеть массового обслуживания,

L – число систем массового обслуживания в сети,

$S_i,\ i=1,\dots,L,$ – ненадежная система массового обслуживания типа $M/M/1$,

μ_i – интенсивность обслуживания прибором системы S_i, $\mu=(\mu_i)$,

S_0 – источник требований,

λ_0 – интенсивность входящего потока требований,

$\Theta=(\theta_{ij}),\ i,j=0,\dots,L,$ – маршрутная матрица,

γ_i – интенсивность наработки на отказ системы S_i, $\gamma=(\gamma_i)$

Предположения об отказе систем:

- Системы выходят из строя независимо.
- При отказе системы все требования, находящиеся в ней, теряются.
- Отказ системы приводит к изменению структуры сети и соответственно матрицы Θ, так что требования не поступают в данную систему.

$b=(b_i)$, $i=1,\ldots,L$, – вектор структуры сети, где $b_i=0$, если система S_i вышла из строя, иначе $b_i=1$,

$\Theta(b)$ – маршрутная матрица сети при условии структуры b.

$\tau_0(b)$ – м.о. длительности реакции, основная характеристика качества функционирования сети со структурой b.

$\hat{\tau}_0$ – пороговое значение м.о. длительности реакции

Процесс функционирования сети

Пока

$$\tau_0(b) < \hat{\tau}_0,$$

вышедшие из строя системы не восстанавливаются.

Если

$$\tau_0(b) \geq \hat{\tau}_0,$$

то неработоспособные системы мгновенно восстанавливаются.

Метод анализа сети обслуживания

$\Gamma(b)$ – подсеть, соответствующая сети Γ со структурой b.

Реализация подсети $\Gamma(b)$ однозначно определяется маршрутной матрицей $\Theta(b)$.

B – множество всевозможных структур b.

D – подмножество структур b, образующих подсети $\Gamma(b)$ со связной конфигурацией, для которых $\Theta(b)$ – неприводима и

$$\tau_0(b) < \hat{\tau}_0, \tag{1}$$

$B \backslash D$ – подмножество структур b, образующих подсети $\Gamma(b)$ для которых

$$\tau_0(b) \geq \hat{\tau}_0, \tag{2}$$

а также несвязные и без стационарного режима, для которых полагаем $\tau_0(b) = \infty$.

Метод анализа сети обслуживания

Эволюцию сети Г можно рассматривать как два протекающих параллельно процесса:

– процесс отказов систем обслуживания с последующим их мгновенным восстановлением при выполнении условия (2);

– процесс обслуживания и переходов требований между исправными системами в сети с постоянной структурой.

Предполагается, что сеть Г(b) мгновенно переходит в стационарный режим.

Стационарные характеристики сетей Г(b), при фиксированных $b \in D$, могут быть получены известными методами.

Метод анализа сети обслуживания

Случайный процесс отказов систем обслуживания может быть описан цепью Маркова с непрерывным временем и множеством состояний D.

Обозначения:

$d = |D|$;

$D = \{b^{(1)},...,b^{(d)}\}$, где $b^{(1)} = (1,...,1)$.

$\widetilde{D} \subset D$ – подмножество состояний $b^{(i)} \in D$, из которых возможен переход в состояния подмножества $B \setminus D$.

$T_i \subset B \setminus D$ – подмножество смежных с $b^{(i)} \in \widetilde{D}$ состояний таких, что $b \in T_i$ тогда и только тогда, когда $\left\| b^{(i)} - b \right\| = 1$ и $\tau_0(b) > \hat{\tau}_0$.

Метод анализа сети обслуживания

Интенсивности переходов из $b^{(i)} \in D$ в $b^{(j)} \in D$

$$\alpha(b^{(i)}, b^{(j)}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{L} \gamma_k \left(b_k^{(i)} - b_k^{(j)}\right), & \textit{если } \left\| b^{(i)} - b^{(j)} \right\| = 1, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \qquad (3)$$

Интенсивность выхода из состояния $b^{(i)} \in D$, при $i \neq 1$,

$$\alpha(b^{(i)}) = \sum_{k=1}^{L} \gamma_k b_k^{(i)} \qquad (4)$$

Интенсивность выхода из $b^{(i)} \in \widetilde{D}$ в подмножество T_i равна

$$\alpha(b^{(i)}, b^{(1)}) := \alpha(b^{(i)}, T_i) = \sum_{b \in T_i} \sum_{k=1}^{L} \gamma_k \left(b_k^{(i)} - b_k\right) \qquad (5)$$

$$\alpha(b^{(1)}) = \sum_{k=1}^{L} \gamma_k b_k^{(1)} - \alpha(b^{(1)}, T_1) \qquad (6)$$

Метод анализа сети обслуживания

$A=(a_{ij})$ – инфинитезимальный оператор цепи Маркова

$$a_{ij}=\alpha(b^{(i)},b^{(j)}),\text{ для } b^{(i)},b^{(j)}\in D,\ i\neq j,$$

$$a_{ii}=-\alpha(b^{(i)}).$$

Пусть M – модельная цепь Маркова, определенная на множестве D инфинитезимальным оператором A.

Стационарное распределение вероятностей состояний цепи $\pi=(\pi(b))$, $b\in D$, является решением СЛАУ

$$\pi A=0$$

с условием нормировки $\sum\limits_{b\in D}\pi(b)=1$.

Метод анализа сети обслуживания

$\chi_k(b)$ – стационарная характеристика системы S_k сети обслуживания $\Gamma(b)$ со структурой b,

χ_k – интегральная стационарная характеристика системы S_k сети Γ определяется по формуле

$$\chi_k = \sum_{b \in D} \chi_k(b)\pi(b), \quad k = 1, \ldots, L,$$

и м.о. длительности реакции сети Γ

$$\tau_0 = \sum_{b \in D} \tau_0(b)\pi(b).$$

Длительность функционирования сети между моментами восстановления

M^* – поглощающая цепь Маркова, отличающаяся от цепи M наличием поглощающего состояния $b^{(1)}$.

Инфинитезимальный оператор A^* цепи M^* имеет вид:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S^1} & S \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{S^{(1)}}$ – вектор интенсивностей поглощения размерности $(d-1)\times 1$, S – матрица интенсивностей переходов в множестве невозвратных состояний размерности $(d-1)\times(d-1)$, $\mathbf{0}$ – нулевой вектор размерности $1\times(d-1)$.

Метод анализа сети обслуживания

Начальное распределение цепи M^* положим равным $\tilde{\beta} = \left(0, \beta\right)$, где $\beta = \left(\beta_i\right)$, $i = 1,\ldots,d-1$, $\beta_i = a_{1i+1}/(-a_{11})$.

Время до поглощения имеет фазовое распределение с математическим ожиданием равным $-\beta S^{-1}\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единичный вектор-столбец. Тогда м.о. времени между моментами восстановления равно

$$g = -\beta S^{-1}\mathbf{1} + (-a_{11})^{-1}.$$