

Метод построения оптимальных симплекс-суммируемых планов высокого порядка для проведения численных экспериментов

Савин А.Н., Вахлаева К.П.



Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского



Факультет компьютерных наук
и информационных технологий

Актуальность

Проектирование функциональных компонентов современных систем передачи информации предполагает математическое моделирование электродинамических характеристик (ЭДХ) входящих в них различных волноведущих систем (ВС), расчёт по моделям характеристик отдельных узлов, а также оптимизацию всего компонента для достижения требуемых параметров.

В настоящее время расчёт ЭДХ ВС может быть осуществлен достаточно быстро и точно полевыми методами, основанными на решении системы уравнений Максвелла. Однако дальнейшая оптимизация ВС с учётом потерь и неоднородностей и, тем более, функционального компонента в целом, является трудно выполнимой задачей, так как количество необходимых расчётов увеличивается на несколько порядков. Также, при расчёте ЭДХ полевыми методами трудно учесть неточности изготовления и качество поверхностей ВС.

Одним из путей решения указанных проблем является использование адекватных полиномиальных регрессионных моделей ЭДХ, построенных по данным численного или физического планируемых экспериментов, и, соответственно, учитывающих влияние вышеуказанных факторов:

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (1)$$

где x_k – независимые переменные (факторы) – например, размеры ВС;

η – моделируемый электродинамический параметр ВС;

$f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ - полином требуемого порядка.



Цель работы

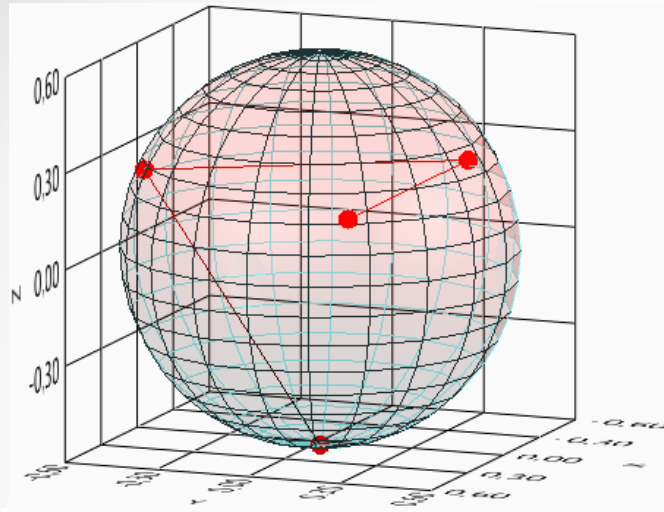
Построение адекватных регрессионных моделей ЭДХ ВС по данным планируемого (активного) эксперимента, т.е. решение задачи нахождения коэффициентов уравнения регрессии (1), возможно лишь при соблюдении ряда жёстких требований: план эксперимента должен быть симметричным, ортогональным, ротатабельным, D-оптимальным и т.д.

Поэтому все усилия теории планирования эксперимента направлены на повышение его эффективности путём предельного сокращения числа проводимых опытов при сохранении адекватности модели.

Целью настоящей работы является разработка метода построения композиционных планов экспериментов высоких порядков на основе симплекса, обладающих свойствами симметричности, ортогональности, ротатабельности и содержащих при этом небольшое количество опытов, а также программная реализация алгоритма метода в среде графического программирования NI LabVIEW.



Математическая модель симплекс-плана эксперимента



Матрица правильного симплекса в k -мерном пространстве:

$$X = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ -R_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ 0 & -R_2 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & \dots & -R_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -R_k \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}; \quad r_i = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}}; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Свойства симплекс-плана 1-го порядка

1) симметричность:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 0 \quad \forall j=1, \dots, k \quad (3)$$

2) нормировка:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^2 = const \quad \forall j=1, \dots, k \quad (4)$$

3) ортогональность:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} x_{il} = 0 \quad \forall ((j, l) = 1, \dots, k \wedge j \neq l) \quad (5)$$

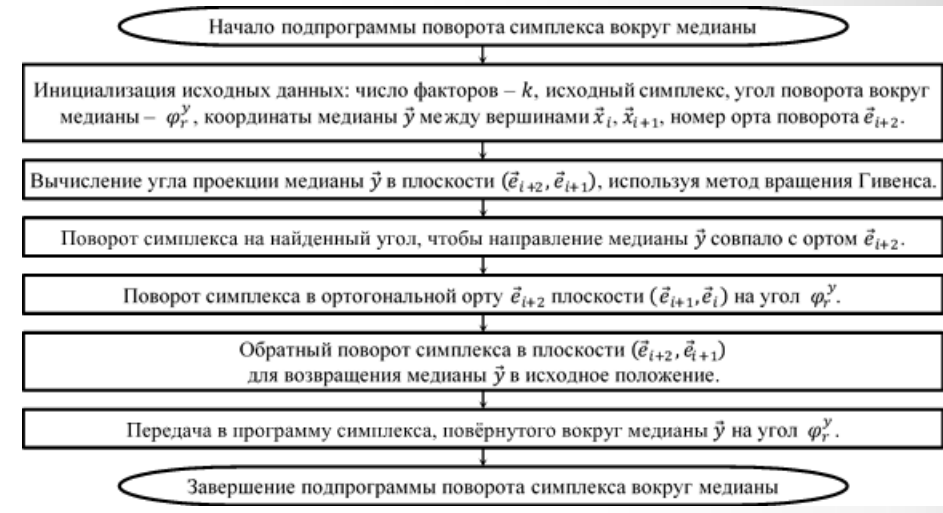
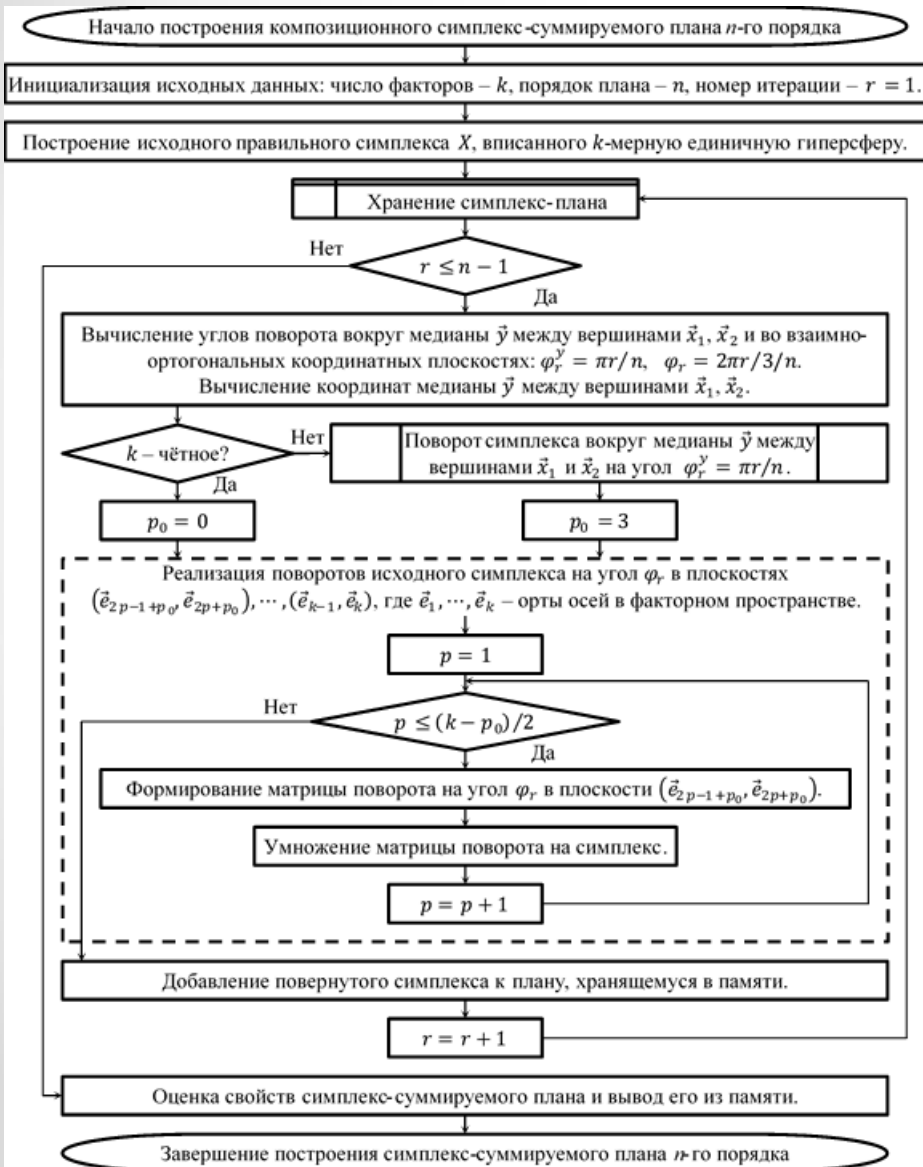
4) ротатабельность:

$$X_i^T M^{-1} X_i = f(\rho) \quad \forall i=1, \dots, m \quad (6)$$

5) D-оптимальность:

$$\min \det M^{-1}, \quad \text{где } M = X^T X \quad (7)$$

Алгоритм метода построения симплекс-суммируемого плана n -го порядка



Композиционные планы экспериментов высоких порядков могут быть построены путём добавления (суммирования) повернутых определённым образом правильных симплексов к исходному плану (2). Соответственно число поворотов составляет $n-1$, где n – порядок плана.

Поворот правильного симплекса (2) можно осуществить, повернув на определённый угол все вершины симплекса – k -мерные векторы x_i , $i=1, \dots, k+1$.

Алгоритм метода построения симплекс-суммируемого плана n -ого порядка

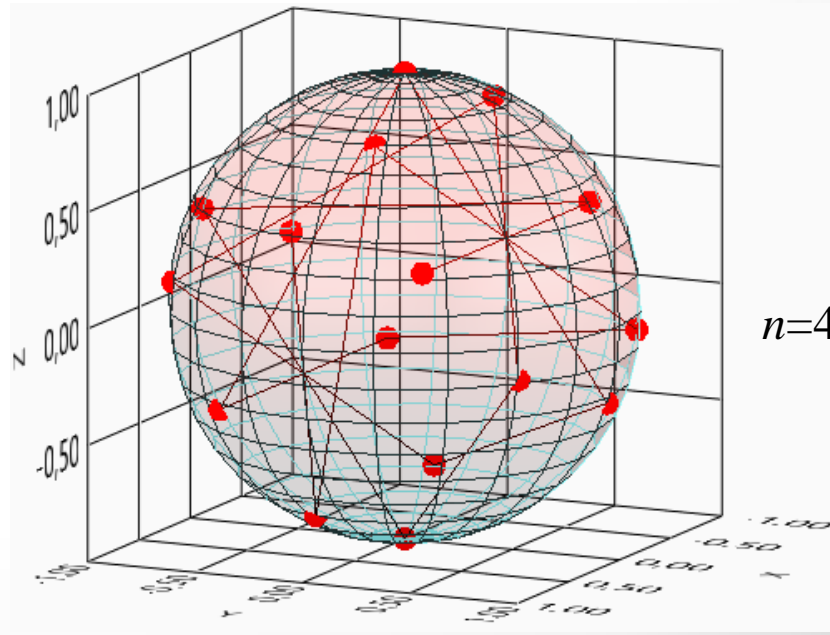
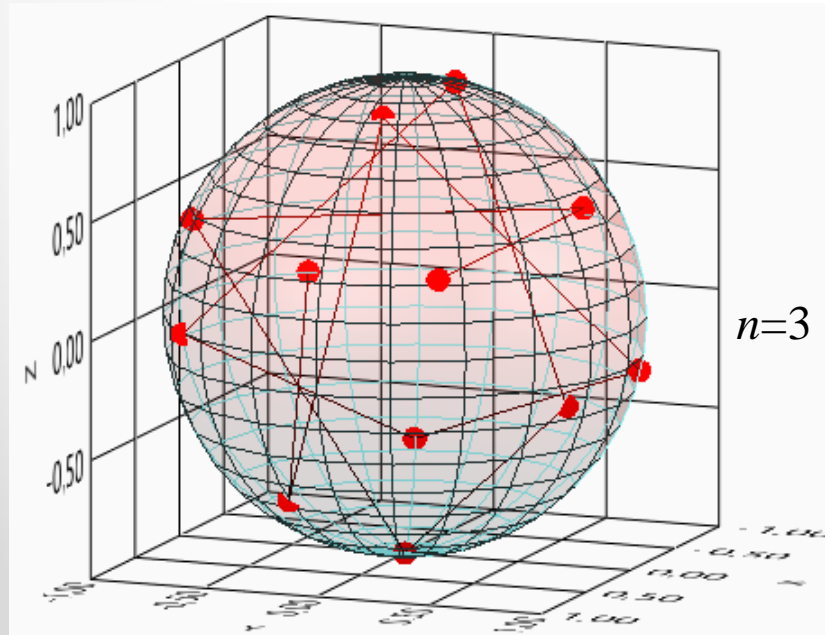
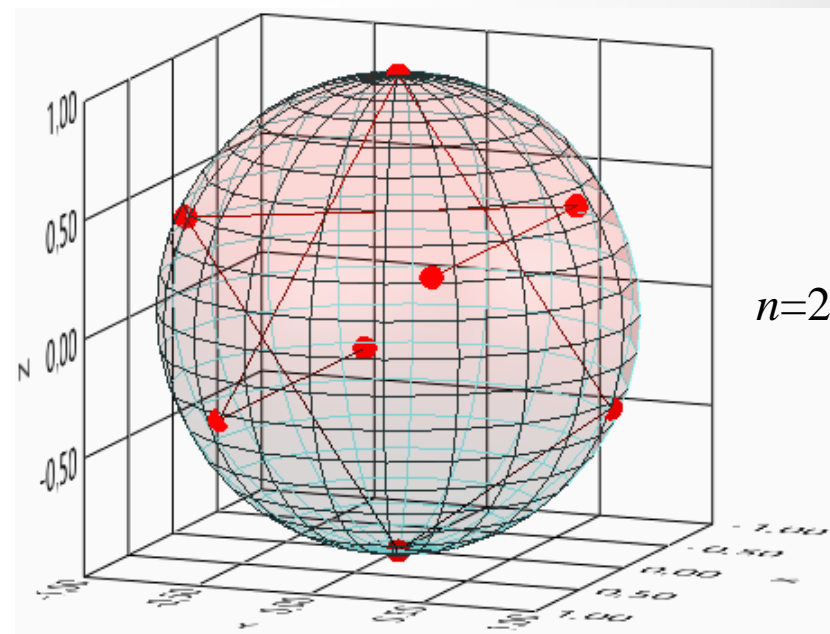
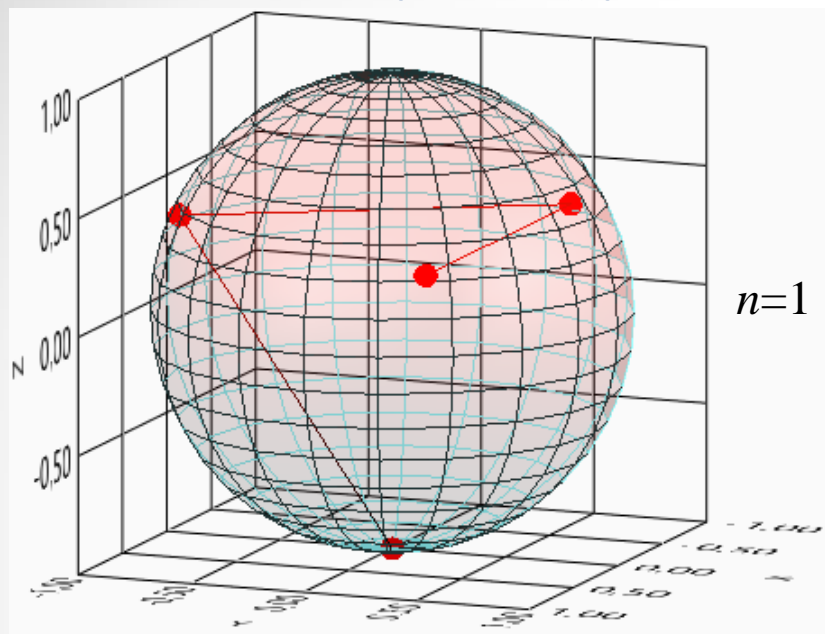
Если число факторов k чётное, то для построения симметричного симплекс-суммируемого плана требуется $n-1$ поворотов симплекса вокруг его центра. При этом каждый такой поворот осуществляется одновременным поворотом всех вершин симплекса в $k/2$ взаимно-ортогональных координатных плоскостях на угол $\varphi_r = \frac{2\pi r}{3n} \quad \forall r=1, \dots, n-1$, т.е. осуществляются повороты всех вершин в плоскостях $(\bar{e}_1, \bar{e}_2), (\bar{e}_3, \bar{e}_4), \dots, (\bar{e}_{k-1}, \bar{e}_k)$, где $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ – орты осей в факторном пространстве. Для реализации поворота плана в требуемой плоскости на заданный угол в соответствии с методом вращений Гивенса сначала формируется необходимая матрица поворота, а затем она умножается на план.

При нечётном числе факторов k для построения симметричного симплекс-суммируемого плана также требуется осуществить $n-1$ поворот симплекса. При этом каждый такой поворот симплекса должен включать поворот его на угол $\varphi_r^y = \frac{\pi r}{n} \quad \forall r=1, \dots, n-1$ вокруг медианы \bar{y} (k -мерного вектора), проходящей через центр симплекса и центр тяжести одного из рёбер симплекса (изменяет три координаты всех вершин), а также одновременный поворот всех вершин симплекса в $(k-3)/2$ взаимно-ортогональных координатных плоскостях на угол $\varphi_r = \frac{2\pi r}{3n} \quad \forall r=1, \dots, n-1$ (изменяет оставшиеся $k-3$ координат всех вершин). Например, можно делать поворот вокруг медианы \bar{y} , проходящей через середину ребра, соединяющего вершины \bar{x}_1 и \bar{x}_2 (изменяет первые три координаты вершин), и повороты всех вершин в $(k-3)/2$ плоскостях $(\bar{e}_4, \bar{e}_5), (\bar{e}_6, \bar{e}_7), \dots, (\bar{e}_{k-1}, \bar{e}_k)$ для изменения, оставшихся $k-3$ координат вершин.

Поворот симплекса вокруг медианы \bar{y} между вершинами \bar{x}_i и \bar{x}_{i+1} осуществляется следующим образом:

- используя метод вращений Гивенса, вычисляем угол проекции медианы \bar{y} в плоскости $(\bar{e}_{i+2}, \bar{e}_{i+1})$ и разворачиваем симплекс на этот угол, чтобы направление \bar{y} совпало с ортом \bar{e}_{i+2} ;
- осуществляем поворот симплекса в ортогональной орту \bar{e}_{i+2} плоскости $(\bar{e}_{i+1}, \bar{e}_i)$ на угол $\varphi_r^y = \frac{\pi r}{n} \quad \forall r=1, \dots, n-1$;
- осуществляем обратный поворот симплекса в плоскости $(\bar{e}_{i+2}, \bar{e}_{i+1})$, так чтобы медиана \bar{y} вернулась в исходное положение.

Примеры композиционных нормализованных симплекс-суммируемых планов для трёх факторов ($k=3$)



Программная реализация разработанного алгоритма в среде графического программирования NI LabVIEW

Генерируем нормализованный n-мерный симплекс-план и оцениваем его свойства

Входные параметры

Число факторов k
8

Порядок плана n
3

Оценка оптимальности плана

ПЛАН
ОПТИМАЛЬНЫЙ

Выходные параметры

error out

status code
0

source

Отображаемые координаты на 3D графике

Орт x
1

Орт y
2

Орт z
3

План	3D Вид	3D Вид 2	Оценка свойств плана	Матрица дисперсий-ковариаций (при дис-и воспр-и $s^2(y)=1$)
Σ элем-в ст-в	Σ кв-в элем-в ст-в	$X_i^T M^{-1} X_i$	Σ почл-х произв-й ст-в	$\det(X^T X^{-1})$
0	3,375	0	-5,42101E-20	5,94032E-5
-5,42101E-20	3,375	0,296296	-5,42101E-20	D-оптимальность
0	3,375	0,296296	0	
-5,42101E-20	3,375	0,296296	0	
-1,0842E-19	3,375	0,296296	0	
-1,49078E-19	3,375	0,296296	0	
0	3,375	0,296296	0	
-1,6263E-19	3,375	0,296296	2,71051E-20	
0	0	0,296296	3,38813E-20	
0	0	0,296296	5,42101E-20	
0	0	0,296296	0	
0	0	0,296296	0	
0	0	0,296296	0	
0	0	0,296296	1,69407E-20	
0	0	0,296296	-2,71051E-20	
0	0	0,296296	-7,11508E-20	
0	0	0,296296	-5,42101E-20	
0	0	0,296296	0	
0	0	0,296296	-2,71051E-20	
0	0	0,296296	-5,0822E-20	
0	0	0,296296	-5,42101E-20	
0	0	0,296296	-5,42101E-20	
0	0	0,296296	-4,06576E-20	
0	0	0,296296	-2,71051E-20	
0	0	0,296296	2,03288E-20	
0	0	0,296296	1,35525E-20	
0	0	0,296296	-3,38813E-21	
0	0	0	-1,86347E-20	
0	0	0	0	

Симметричность
Нормировка
Ротатабельность
Ортогональность

Результаты

В ходе выполнения работы получены следующие результаты:

- предложен метод построения композиционных планов экспериментов высоких порядков на основе правильного симплекса, корректно функционирующий как при чётном, так и при нечётном количестве факторов;
- осуществлена программная реализация предложенного метода построения композиционных планов в среде графического программирования NI LabVIEW;
- разработан программный модуль оценки свойств планов экспериментов;
- показано, что построенный с помощью предложенного метода план третьего порядка для восьми факторов обладает оптимальными свойствами при малом количестве опытов и, следовательно, может быть использован для проведения планируемого численного эксперимента по моделированию электродинамических характеристик волноведущих систем приборов СВЧ.

Список использованных источников

1. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация мощных приборов СВЧ. – Минск: БГУИР, 2006. – 275 с.
2. Программа 3D-моделирования EM- полей ANSYS HFSS. – URL: <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-hfss>.
3. Накрап И.А., Савин А.Н. Экспериментальное исследование влияния случайных неоднородностей на затухание волн в замедляющей системе типа гребёнка в волноводе// СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии: Материалы 19-ой Междун. Крымской конф. (КрыМиКо2009). –Украина. Севастополь: Вебер, 2009. –С. 155–156.
4. Накрап И.А., Савин А.Н. Экспериментальное исследование влияния качества поверхности на затухание волн в замедляющей системе типа гребенка в волноводе// СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии: Материалы 19-ой Междун. Крымской конф. (КрыМиКо2009). –Украина. Севастополь: Вебер, 2009. –С. 157–158.
5. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976 – 279 с.
6. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971 – 207 с.
7. Налимов В.В., Чернова М.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука. 1965, 340 с.
8. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента. – М.: Мир. 1967. – 406 с.
9. Голикова Т.И., Панченко Л.А. Систематизация планов для оценки полиномиальных моделей второго порядка. – В сб.: Планирование оптимальных экспериментов / Под ред. Малютова М.Б. – М.: МГУ, 1975. – Вып. 48. – С. 106 – 149.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

10. Савин А.Н., Доронин Д.М., Накрап И.А., Салий И.Н. Метод построения симплекс-суммируемого плана n -го порядка проведения эксперимента для моделирования характеристик замедляющих систем / Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – Самара: Изд-во Самарского гос-о ун-та, 2010. – Том 13. N 2 – С. 68-75.
11. Среда графического программирования NI LabVIEW. URL: <http://www.LabVIEW.ru>
12. Box G.E.P., Behnken D.W. Simplex-sum designs: a class of second order rotatable designs derivable from those of first order // Ann. Math. Statistics. 1960. – V. 31. – N4. – 1960. – P. 838.
13. Kiefer J. Optimum experimental designs // Journal of the Royal Statistical Society. Ser. – B. 21. – N2. – 1959. – P. 272.
14. Горский В.Г., Бродский В.З. Симплексный метод планирования экстремальных экспериментов // Заводская лаборатория. – 1965. – Т. 31. – №7. – С. 831-836.
15. Горский В.Г., Бродский В.З. О симплекс-планах первого порядка и связанных с ними планах второго порядка. – В сб.: Новые идеи в планировании эксперимента. Под. ред. Налимова В.В. – М.: Наука, 1969. – с. 59 – 117.
16. Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1 // Пер с франц. – М.: Мир, 1988. – 204 с.

Спасибо за внимание!