Достаточные условия гамильтоновости графа

Абросимов Михаил Борисович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского

Уильям Гамильтон
(1805-1865)

§ 5. Гамильтоновы линии

В 1859 г. известный ирландский математик сэр Уильям Роуэн Гамильтон выпустил в продажу своеобразную головоломку. Ее основной частью был правильный додекаэдр, сделанный из дерева (рис. 29). Это один из так называемых *правильных многогранников*: его гранями служат 12 правильных пятиугольников, причем в каждой из 20 его вершин сходится по три ребра.

Каждая вершина гамильтонова додекаэдра была помечена названием одного из крупных городов — Брюссель, Кантон, Дели, Франкфурт и т. д. Задача состояла в нахождении пути вдоль ребер додекаэдра, проходящего через каждый город в точности по одному разу; чтобы сделать задачу более интересной, порядок прохождения нескольких первых городов

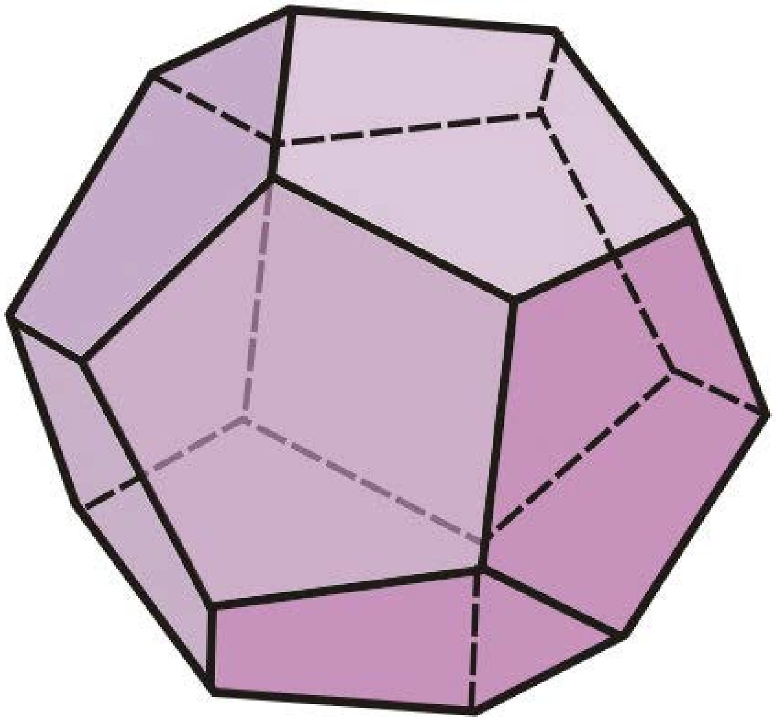
Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит остовной цикл, то есть циклический путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

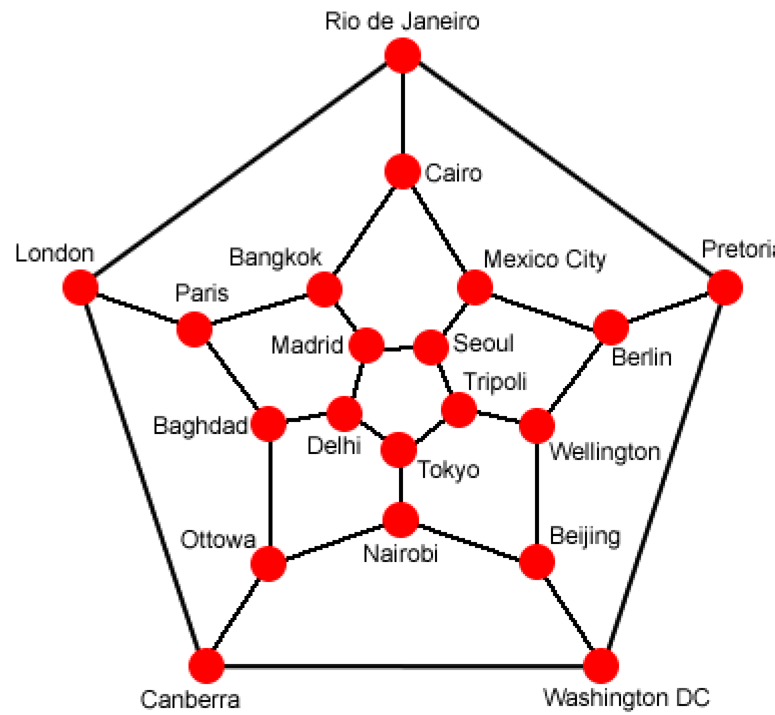
Граф называется *гипогамильтоновым*, если сам он не является гамильтоновым, но все его максимальные подграфы являются гамильтоновыми.

Граф называется *полугамильтоновым*, если он содержит остовную цепь.

Граф с n вершинами называется *панциклическим*, если он содержит все циклы с длинами от 3 до n.

Додекаэдр и его граф

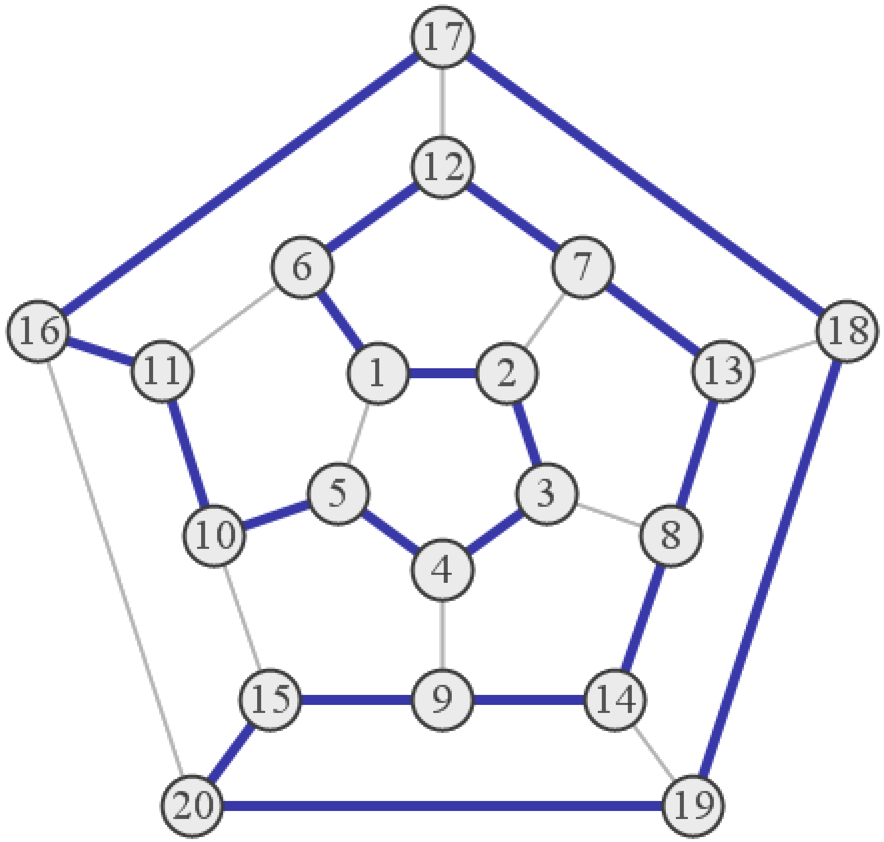




Степень каждой вершины получившегося графа равна 3.

Такие графы называются *кубическими*.

Пример гамильтонова цикла в додекаэдре



- Claude Berge Theorie des graphes et ses applications 1958 (1962)
  Теорема Дирака без доказательства
- Oystein Ore Theory of graphs 1962 (1980)
- Christofides Nicos Graph theory. An algorithmic approach 1975 (1978)

Теорема 1. (Дирак, 1952 [1]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ степень любой вершины $d(u) \geqslant n/2$, то граф G — гамильтонов.

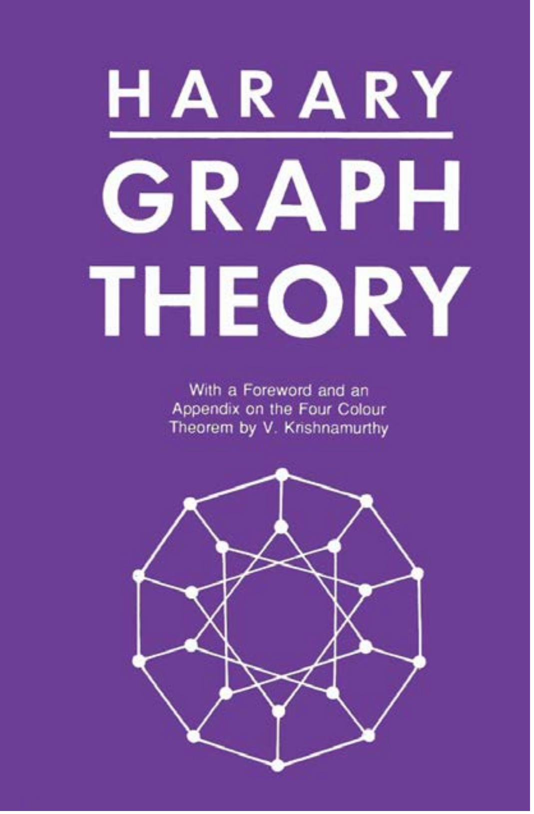
Теорема 2. (Оре, 1960 [2]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n$, то граф G — гамильтонов.

Ronald J. *Gould Updating the Hamiltonian Problem – A Survey*. 1991.

37 страниц, 170 источников

Ronald J. *Gould Advances on the Hamiltonian Problem - A Survey*. 2002.

45 страниц, 248 источник



Frank Harary

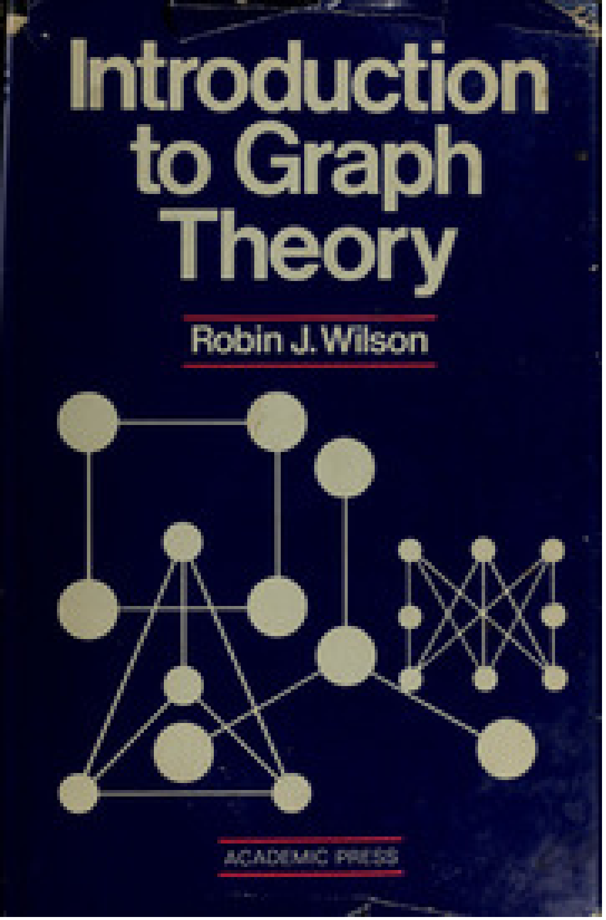
Graph Theory

1969 (1973)

Теорема Поша ~ Оре ~ Дирака

The next theorem, due to Pósa [P7], gives a sufficient condition for a graph to be hamiltonian. It generalizes earlier results by Ore and Dirac which appear as its corollaries.

Theorem 7.3 Let G have $p \geq 3$ points. If for every n, $1 \leq n < (p-1)/2$, the number of points of degree not exceeding n is less than n and if, for odd p, the number of points of degree $(p-1)/2$ does not exceed $(p-1)/2$, then G is hamiltonian.

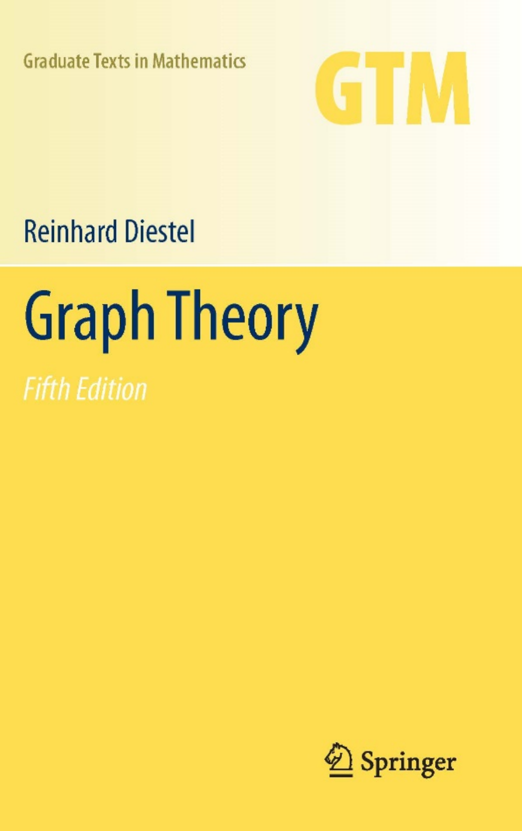


Robin J. Wilson

Introduction to Graph Theory

1972 (1977)

Теорема 7А (Дирак 1952). *Если в простом графе с* n ($\geqslant 3$) *вершинами* $\rho(v) \geqslant n/2$ *для любой вершины* v, *то граф* G *является гамильтоновым.*



Reinhard Diestel

Graph theory

2017 (1977)

Теорема Хватала ~ Дирака

Theorem 10.2.1. (Chvátal 1972)
An integer sequence $(a_1, \ldots, a_n)$ *such that* $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < n$ *and* $n \geqslant 3$ *is hamiltonian if and only if the following holds for every* $i < n/2$:

$$a_i \leqslant i \Rightarrow a_{n-i} \geqslant n-i\,.$$

Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.

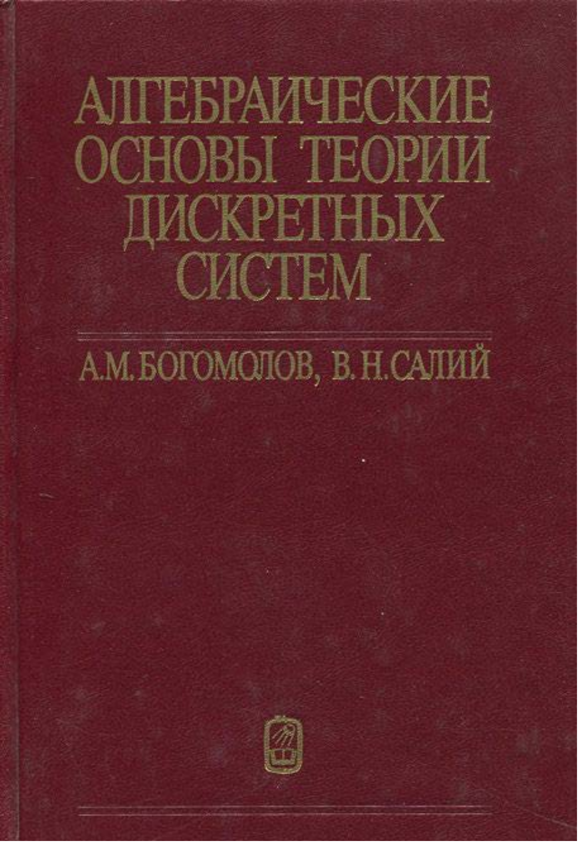
Лекции по теории графов

1990

Теорема Хватала ~ Оре ~ Дирака

Теорема 44.2 (В. Хватал, 1972 г.). *Граф со степенной последовательностью* $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ *является гамильтоновым, если для всякого* k, *удовлетворяющего неравенствам* $1 \leqslant k < n/2$, *истинна импликация*

$$(d_k \leqslant k) \Rightarrow (d_{n-k} \geqslant n-k).$$



Богомолов А.М., Салий В.Н.

Алгебраические основы теории дискретных систем

1997

Теорема Оре ~ Дирака

В отличие от эйлеровых графов, гамильтоновы графы не имеют пока пригодной для применений характеризации. Одним из сильных достаточных условий [44] является

Т е о р е м а 3.20. *Если в связном n-вершинном ($n \geq 3$) графе для любых двух несмежных вершин u, v выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geq n$, то этот граф гамильтонов.*

Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.

Дискретная математика. Графы, матроиды, алгоритмы

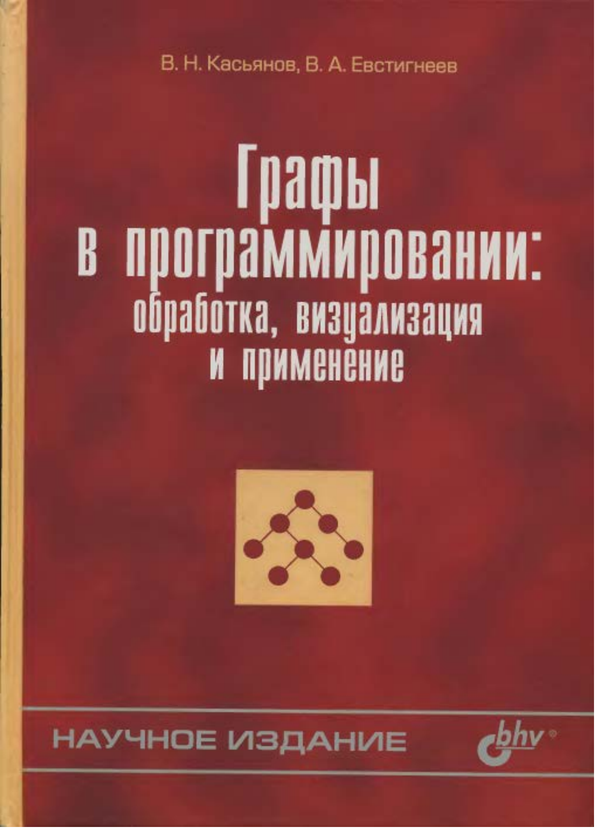
2001

Теорема Хватала ~ Оре ~ Дирака ~ Поша*

Теорема 3.3 (Хватал, 1972). *Пусть* G — *обыкновенный граф,* $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ — *его последовательность степеней и* $n \ge 3$. *Если для любого* k *верна импликация*

$$d_k \le k < n/2 \rightarrow d_{n-k} \ge n - k, \qquad (*)$$

то граф G *гамильтонов.*



Касьянов В. Н., Евстигнеев В.А.

Графы в программировании: обработка, визуализация и применение

2003

Теорема Хватала ~ Оре ~ Дирака

Теорема Хватала. *Граф со степенной последовательностью* $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ *является гамильтоновым, если для всякого* k, *удовлетворяющего неравенствам* $1 \le k < n/2$, *истинна импликация*

$$(d_k \le k) \Rightarrow (d_{n-k} \ge n - k).$$

Достаточные условия гамильтоновости типа Дирака

Теорема 1. (Дирак, 1952 [1]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ степень любой вершины $d(u) \geqslant n/2$, то граф G — гамильтонов.

Теорема 2. (Оре, 1960 [2]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n$, то граф G — гамильтонов.

Теорема 3. (Оре, 1961 [3]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ число рёбер $m \geqslant \frac{n^2-3n+6}{2}$, то граф G — гамильтонов.

Достаточные условия гамильтоновости типа Дирака

Теорема 4. (Поша, 1962 [4]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующим двум условиям, то он гамильтонов:
1) для всякого k: $1 \leqslant k < \frac{n-1}{2}$ число вершин со степенями меньшими или равными k меньше, чем k;
2) для нечетного n число вершин со степенями меньшими или равными $\frac{n-1}{2}$ не превосходит $\frac{n-1}{2}$.

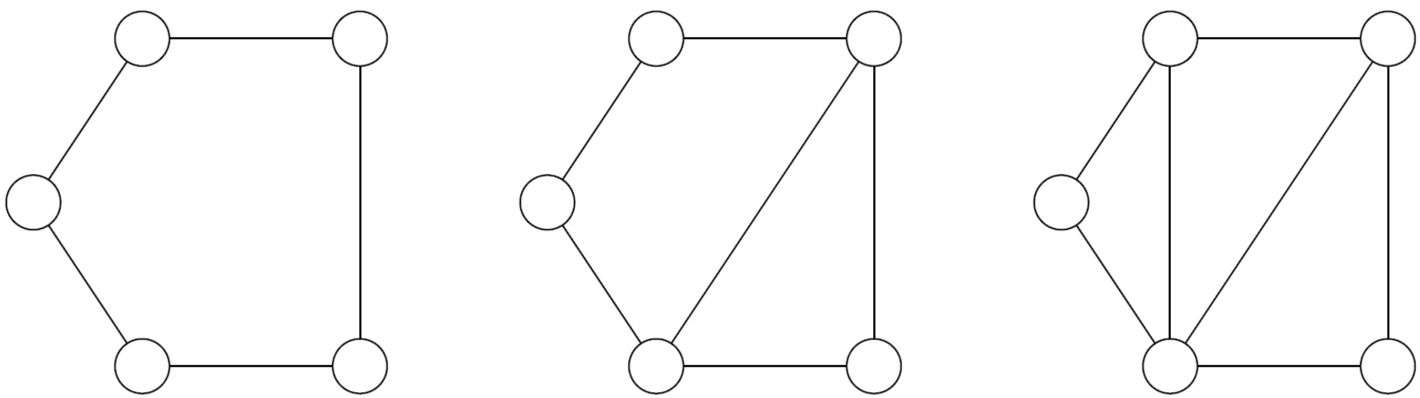
Теорема 5. (Поша, 1962 [4]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он гамильтонов: для всякого k: $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ число вершин со степенями меньшими или равными k меньше, чем k.

Теорема 6. (Хватал, 1972 [5]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он гамильтонов: для любого k верна импликация: $(d_k \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}) \to (d_{n-k} \geqslant n-k)$.

Достаточные условия гамильтоновости типа Дирака

Теорема 1. (Дирак, 1952 [1]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ степень любой вершины $d(u) \geqslant n/2$, то граф G — гамильтонов.

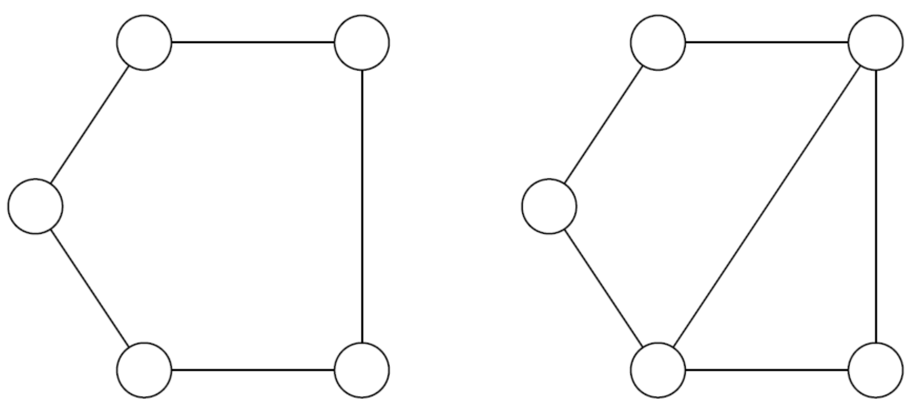
Теорема 2. (Оре, 1960 [2]) Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n$, то граф G — гамильтонов.



а) б) в)

Достаточные условия гамильтоновости типа Дирака

Теорема 4. (Поша, 1962 [4]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующим двум условиям, то он гамильтонов:
1) для всякого k: $1 \leqslant k < \frac{n-1}{2}$ число вершин со степенями меньшими или равными k меньше, чем k;
2) для нечетного n число вершин со степенями меньшими или равными $\frac{n-1}{2}$ не превосходит $\frac{n-1}{2}$.

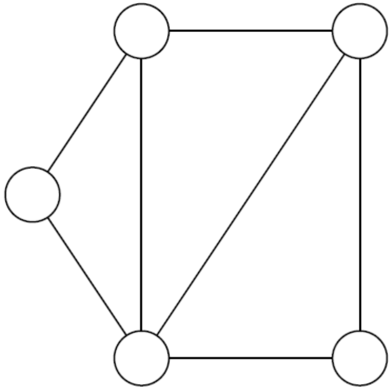


а) б)

Достаточные условия гамильтоновости типа Дирака

Теорема 4. (Поша, 1962 [4]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующим двум условиям, то он гамильтонов:
1) для всякого k: $1 \leqslant k < \frac{n-1}{2}$ число вершин со степенями меньшими или равными k меньше, чем k;
2) для нечетного n число вершин со степенями меньшими или равными $\frac{n-1}{2}$ не превосходит $\frac{n-1}{2}$.

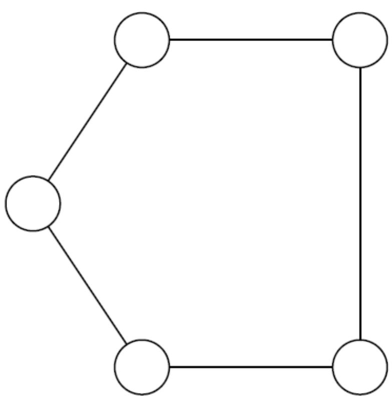
Теорема 5. (Поша, 1962 [4]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он гамильтонов: для всякого k: $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ число вершин со степенями меньшими или равными k меньше, чем k.



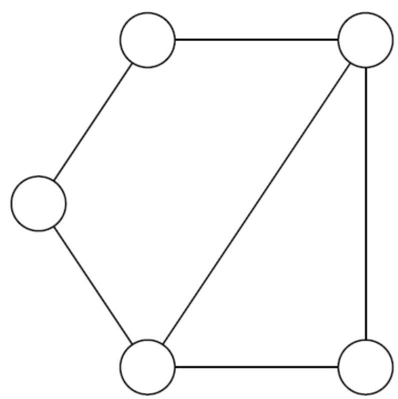
в)

Достаточные условия гамильтоновости типа Дирака

Теорема 6. (Хватал, 1972 [5]) Если граф G с числом вершин $n \geqslant 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он гамильтонов: для любого k верна импликация: $(d_k \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}) \to (d_{n-k} \geqslant n - k)$.



а)



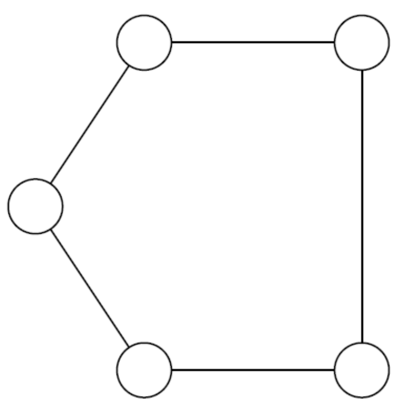
б)

Определение 1. Замыкание $[G]$ n-вершинного графа G получается из графа G добавлением рёбер $\{u, v\}$ для всех пар вершин u и v, для которых выполняется условие $d(u) + d(v) \geqslant n$.

Теорема 7. (Бонди-Хватал, 1976 [6]). Граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание $[G]$ является гамильтоновым.

Построение замыкания графа имеет вычислительную сложность $O(n^4)$ [6]. Обычно теорема Бонди-Хватала используется в форме следующего достаточного условия гамильтоновости.

Теорема 8. (Бонди-Хватал, 1976 [6]). Если замыкание $[G]$ графа G является полным графом, то граф G — гамильтонов.



а)

Таблица 1

Количество связных, двусвязных и гамильтоновых графов

n	Всего	Связных	Двусвязных	Гамильтоновых
3	4	3	1	1
4	11	6	3	3
5	34	21	10	8
6	156	112	56	48
7	1044	853	468	383
8	12346	11117	7123	6196
9	274668	261080	194066	177083
10	12005168	11716571	9743542	9305118
11	1018997864	1006700565	900969091	883156024
12	165091172592	164059830476	153620333545	152522187830

Таблица 2

Количество связных, двусвязных и гамильтоновых графов в процентах

n	Всего	Связных, %	Двусвязных, %	Гамильтоновых, %
3	4	75%	25%	25%
4	11	54,55%	27,27%	27,27%
5	34	61,76%	29,41%	23,53%
6	156	71,79%	35,90%	30,77%
7	1044	81,70%	44,83%	36,69%
8	12346	90,05%	57,69%	50,19%
9	274668	95,05%	70,65%	64,47%
10	12005168	97,60%	81,16%	77,51%
11	1018997864	98,79%	88,42%	86,67%
12	165091172592	99,38%	93,05%	92,39%

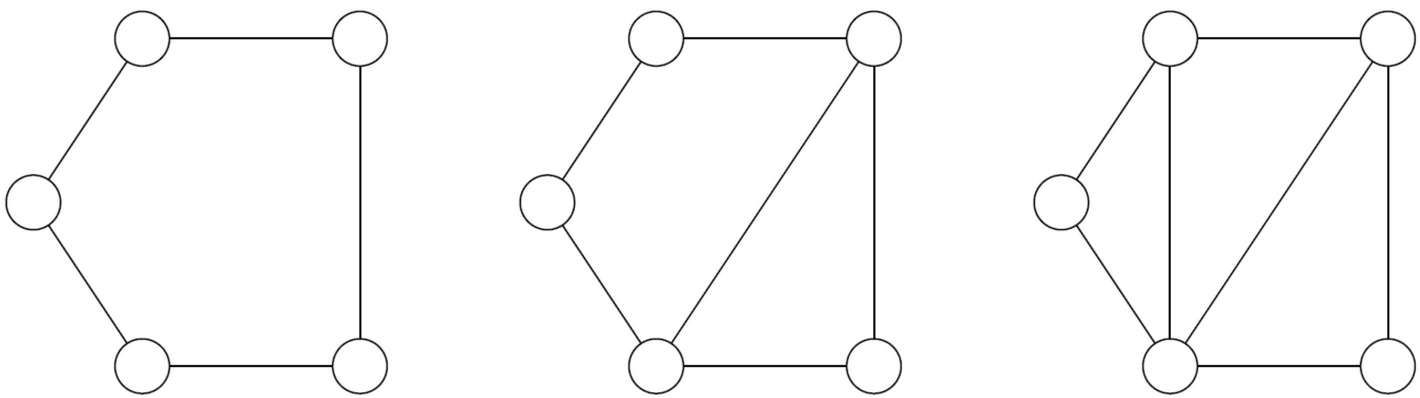
Таблица 4

Количество графов Дирака, Оре, Поша, Хватала и Бонди-Хватала в процентах

n	Гамильтоновых	Дирак	Оре	Поша	Хватал	Бонди-Хватал
3	1	100%	100%	100%	100%	100%
4	3	100%	100%	100%	100%	100%
5	8	37,50%	62,50%	75,00%	75,00%	87,50%
6	48	39,58%	43,75%	64,58%	68,75%	93,75%
7	383	7,57%	17,75%	49,61%	50,65%	91,91%
8	6196	6,84%	8,12%	40,09%	43,35%	89,41%
9	177083	0,66%	2,79%	30,21%	30,70%	88,67%
10	9305118	1,16%	1,38%	28,84%	30,90%	89,19%
11	883156024	0,10%	0,60%	24,47%	24,73%	90,92%
12	152522187830	0,32%	0,38%	26,82%	28,36%	92,85%

Определение 2. Расстоянием $d(u, v)$ между двумя вершинами u и v связного графа называется длина кратчайшего пути, соединяющего их.

Теорема 9. (Фан, 1984 [7]) Пусть G — двусвязный граф с числом вершин $n \geqslant 3$. Если для всех вершин u и v, расстояние между которыми $d(u, v) = 2$, выполняется условие $max\{d(u), d(v)\} \geqslant \frac{n}{2}$, то граф G — гамильтонов.



а) б) в)

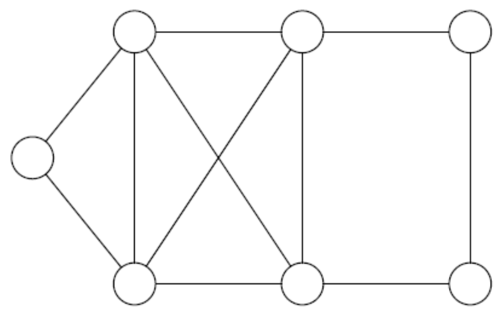


Рис. 3. Граф, удовлетворяющий теореме Фана, но не являющийся графом Бонди-Хватала

Теорема 10. (Фодри-Гульд-Джекобсон-Шелп, 1989 [8]) Пусть G — двусвязный граф с числом вершин $n \geqslant 3$. Если для всех пар несмежных вершин u и v выполняется условие $|N(u) \cup N(v)| \geqslant \frac{2n-1}{3}$, то граф G — гамильтонов.

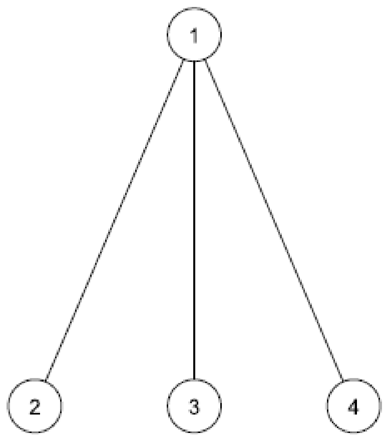
Таблица 6

Количество графов, удовлетворяющих условиям из теорем 3, 5, 9 и 10 в процентах

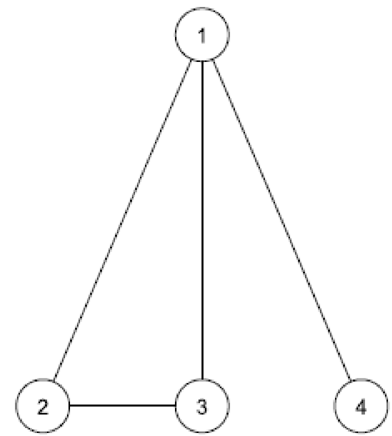
n	Гамильтоновых	Теорема 3	Теорема 5	Теорема 9	Теорема 10
3	1	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
4	3	66,67%	100,00%	100,00%	33,33%
5	8	50,00%	62,50%	62,50%	100,00%
6	48	18,75%	64,58%	79,17%	58,33%
7	383	4,96%	34,99%	27,94%	24,28%
8	6196	0,71%	40,09%	31,50%	20,24%
9	177083	0,06%	19,13%	5,70%	5,21%
10	9305118	0,00%	28,84%	9,15%	1,05%
11	883156024	0,00%	14,99%	1,32%	3,98%
12	152522187830	0,00%	26,82%	3,27%	1,06%

Запрещенные подграфы

Теорема 2. *(Гудман-Хедетниеми, 1976 [5]). Если двусвязный граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и $K_{1,3}+x$, то граф G — гамильтонов.*



а)



б)

Рис. 1: Графы $K_{1,3}$ и $K_{1,3}+x$.

Теорема 4. *Для заданного $n > 4$ количество графов, удовлетворяющих условию Гудмана-Хедетниеми, равно*

$$\lfloor n/2 \rfloor + 2.$$

Вершинная связность

Если после удаления любого множества из менее чем k вершин вместе с инцидентными им ребрами граф с числом вершин более k остается связным, то говорят, что он *k-вершинно-связный*. Наибольшее k, при котором граф k-вершинно-связный, называется *вершинной связностью* графа. Граф с точкой сочленения имеет вершинную связность равную 1[3].

Теорема 7 (Хэггвист-Никогосян): Пусть G – двусвязный граф порядка n. Если выполняется: $d \geq (n + k) / 3$, то G – гамильтонов, где d – минимальная степень вершины[6].

Введем новое обозначение σ_k в графе G: $\sigma_k(G) = min\{\sum_{i=1}^{k} d_i\}$, где $\{v_1 \ldots v_n\}$ – независимое множество вершин в графе G.

Теорема 8 (Бауэр-Брусма-Вельдман-Рао): Пусть G – двусвязный граф порядка n и вершинной связностью k. Если выполняется: $\sigma_3(G) \geq n + k$, то G – гамильтонов[7].

Теорема 9 (Бонди): Пусть G – граф порядка $n \geq 3$ и вершинной связностью k. Если выполняется: $\sigma_{k+1}(G) > \frac{1}{2}(n - 1)(k + 1)$, то G – гамильтонов[8].

6. Haggkvist, R. A Remark on Hamiltonian cycles / R. Haggkvist, C. Nicoghossian // J. Combinat. Theory B 30, 1981. P. 118–120.

7. Bauer, D. A generalization of a result of Haggkvist and Nicoghossian / D. Bauer, H. J. Broersma, H. J. Veldman, L. Rao // J. Combinat. Theory B 47, 1989. P. 237–243.

8. Bondy, J.A. Longest paths and cycles in graphs of high degree / J.A. Bondy // Research Report CORR 80-16, Department of Combinatorics and Optimization, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1980. P. 11–13.

Flinders Hamiltonian Cycle Project

- HCP – Hamiltonian cycle problem
- TSP – traveling salesman problem

TSPLIB – 9 графов с числом вершин от 1000 до 5000.

- http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/

Extended Foster Census – 332 графа с числом вершин до 1000.

- http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00013890/remote/foster/

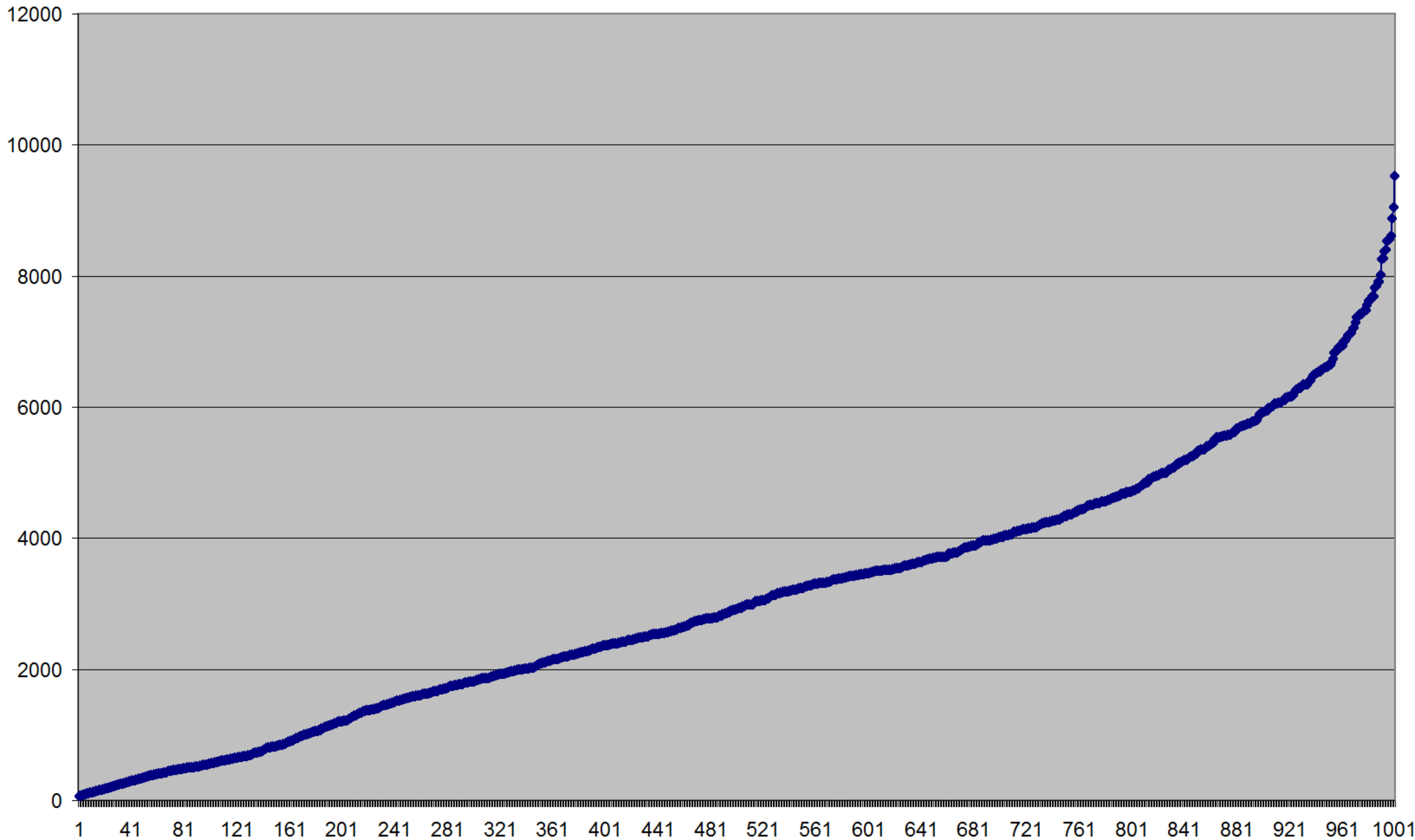
Алгоритмы

- Concorde — D.L. Applegate, R.B. Bixby, V. Chavátal, and W.J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press (2006).
- LKH — K. Helsgaun, An Effective Implementation of Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic, *Eur. J. Oper. Res.* **126** (2000), 106–130.
- SLH — P. Baniasadi, V. Ejov, J.A. Filar, M. Haythorpe, and S. Rossomakhine, Deterministic "Snakes and Ladders" Heuristic for the Hamiltonian cycle problem, *Math. Program. Comput.*, **6**(1) (2014), 55–75.

Flinders Hamiltonian Cycle Project

- В 2015 был разработан FHCP Challenge Set из 1001 задачи.
- С 30 сентября 2015 по 30 сентября 2016
- 1001$
- Nathann Cohen and David Coudert решили 985 задач

5. M. Nurhafiz (Independent Researcher), 385 graphs solved.
4. M. Noisternig (TU Darmstadt, Germany), 464 graphs solved.
3. A. Gharbi and U. Syarif (King Saud University, Saudi Arabia), 488 graphs solved.
2. A. Johnson (IBM, United Kingdom), 614 graphs solved.
1. N. Cohen and D. Coudert (INRIA, France), 985 graphs solved.



1001 граф с числом вершин от 66 до 9528

11 графов из базы FHCP, удовлетворяющих условию Бонди-Хватала

- n = 400 graph59.hcp
- n = 460 graph72.hcp
- n = 480 graph79.hcp
- n = 500 graph84.hcp
- n = 510 graph90.hcp
- n = 540 graph96.hcp
- n = 677 graph128.hcp
- n = 724 graph134.hcp
- n = 823 graph150.hcp
- n = 909 graph162.hcp
- n = 1123 graph188.hcp

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!