National Research
Tomsk
State
University

# Математические модели современных инфокоммуникационных систем и методы их исследования


*Моисеева Светлана Петровна*
*D. Sc. in Physics and Mathematics, Professor of Department of probability theory and mathematical statistics*

# Современные модели инфокоммуникационных потоков

## Модулированные пуассоновские потоки

Пусть задан некоторый дискретный случайный процесс $k(t)$ с конечным множеством состояний $k = 1,2,\ldots,K$ и множество неотрицательных чисел $\lambda_k \geq 0$.

**Определение.** Случайный поток однородных событий будем называть **модулированным пуассоновским** (МР-потоком), управляемым случайным процессом $k(t)$, если выполнены условия

$$P\{m(t+\Delta t) = m+1 \mid m(t) = m, k(t) = k\} = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{m(t+\Delta t) > m+1 \mid m(t) = m, k(t) = k\} = o(\Delta t),$$

где $k$=1,2,…,K ,

Среди множества MP-потоков выделим класс **марковских модулированных пуассоновских потоков** (MMPP-потоков).

Пусть эргодическая цепь Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний $k = 1,2,...,K$ задана матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$ с элементами $q_{k_1k_2}$. Также задан набор неотрицательных чисел $\lambda_k \geq 0$. Обозначим $n(t)$ – число событий определяемого случайного потока, наступивших за время $t$, то есть на интервале $[0,t)$.

**Определение.** Случайный поток однородных событий будем называть ***марковски модулированным пуассоновским потоком*** (**MMPP**–потоком), управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$, если выполняются равенства

$$P\{n(t+\Delta t) = n+1 | n(t) = n, k(t) = k_1\} = \lambda_{k_1}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{n(t+\Delta t) > n+1 | n(t) = n, k(t) = k_1\} = o(\Delta t).$$

**Определение и математическая модель MAP-потока (Markovian Arrival Process)**

Пусть эргодическая цепь Маркова $k(t)$ задана матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$ с элементами $q_{k_1k_2}$. Также задан набор неотрицательных чисел $\lambda_k \geq 0$ и вероятности $d_{k_1k_2}$, причем $d_{k_1k_1} = 0$. Обозначим $n(t)$ – число событий определяемого случайного потока, наступивших за время $t$.

**Определение.** Случайный поток однородных событий будем называть **MAP-*потоком*** (Markovian Arrival Process), управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$, если выполняются равенства

$$P\{n(t+\Delta t) = n+1 \mid n(t) = n, k(t) = k_1\} = \lambda_{k_1}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{n(t+\Delta t) > n+1 \mid n(t) = n, k(t) = k_1\} = o(\Delta t),$$

$$P\{n(t+\Delta t) = n+1, k(t+\Delta t) = k_2 \mid n(t) = n, k(t) = k_1\} = d_{k_1k_2} q_{k_1k_2}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{n(t+\Delta t) = n, k(t+\Delta t) = k_2 \mid n(t) = n, k(t) = k_1\} = (1 - d_{k_1k_2}) q_{k_1k_2}\Delta t + o(\Delta t).$$

**Синхронный MAP-поток**

**Определение.** Если в MAP-потоке все элементы $\lambda_k$ положить равными нулю, а все вероятности $d_{k_1 k_2}$ равными единице, кроме элементов $d_{kk}$, которые по условию равны нулю, получим ***синхронный* MAP*-поток***, в котором моменты наступления событий совпадают с моментами изменения состояний управляющей этим потоком цепи Маркова $k(t)$.

**Рекуррентный PH-поток**

**Определение.** Случайный поток однородных событий будем называть ***рекуррентным потоком фазового типа*** (*рекуррентным* PH-*потоком*), если события этого потока наступают тогда и только тогда, когда цепь Маркова $k(t)$ попадает в репродуктивное состояние.

**BMAP-поток**

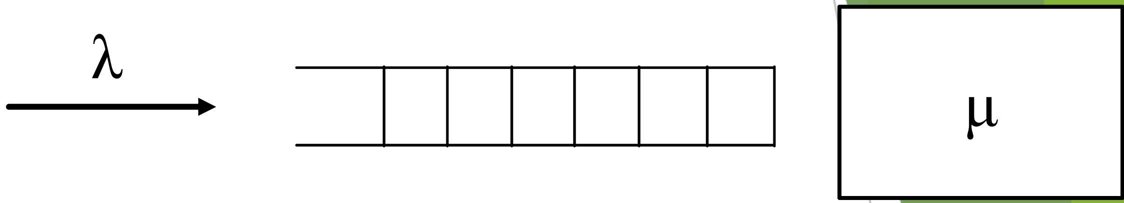
Заявки в BMAP-потоке поступают группами случайного числа. Моменты реализации групп образуют MAP-поток.

Имеется однородная эргодическая цепь Маркова с непрерывным временем $k(t)$, принимающая значения $k(t) = 1,2,\dots,K$, определяемая матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{k\nu}$. Задана последовательность неотрицательных величин $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_K$ – условных интенсивностей поступления групп заявок и совокупность одномерных условных распределений $d_{k\nu}(l)$ – вероятностей того, что поступает $l$ требований в моменты наступления событий BMAP-потока.

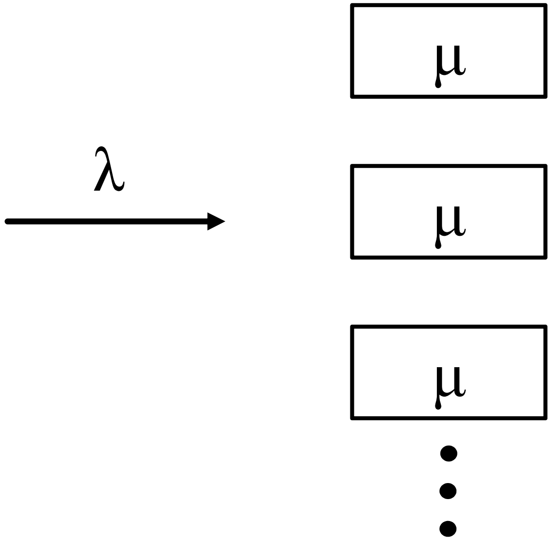
1. **Cox, D. R.** The analysis of non-Markovian stochastic processes / D. R. Cox // Proc.Cambr. Phil. Soc. – 1955. – Vol. 51, no. 3. – P. 433–441.
2. **Cox, D. R.** Some statistical methods connected with series of events / D. R. Cox // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1955. – Vol. 17. – P. 129–164
3. **Kingman, J. F. C.** On doubly stochastic Poisson process / J. F. C. Kingman // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. – 1964. – Vol. 60, is. 4. – P. 923–930.
4. **Башарин, Г. П.** О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1 /Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. –1979. – № 6. – С. 92–99.
5. **Башарин, Г. П.** О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 2 /Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. –1980. – № 1. – С. 55–61.
6. **Neuts, M. F.** A versatile Markovian point process / M. F. Neuts // Journal of Applied Probability. – 1979. – Vol. 16. – P. 764–779.
7. **Lucantoni, D. M.** New results on single server with a bath Markovian arrival process /D. M. Lucantoni // Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.
8. **Klemm, A.** Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process / A. Klemm, C. Lindermann, M. Lohmann. // Performance Evaluation. –2003.– Vol. 54.– P. 149–173.
9. **Kang, S. H.** An application of Markovian Arrival Process to modeling superposed ATM cell streams / S. H. Kang, Y. H. Kim, D. K. Sung, B. D. Choi. // IEEE Trans. Commun. – 2002. - Vol. 50. – No. 4. – P. 633–642.
10. **Ложковский, А. Г.** Теория массового обслуживания в телекоммуникациях / А. Г. Ложковский – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2012. – 112 с.
11. **Царенков, Г. В.** BMAP-поток как модель трафика реальной сети / Г. В. Царенков //Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей: материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 22–24 февр. 2005). – Минск: Изд-во БГУ, 2005. – С. 209–214.

# Три класса систем обслуживания

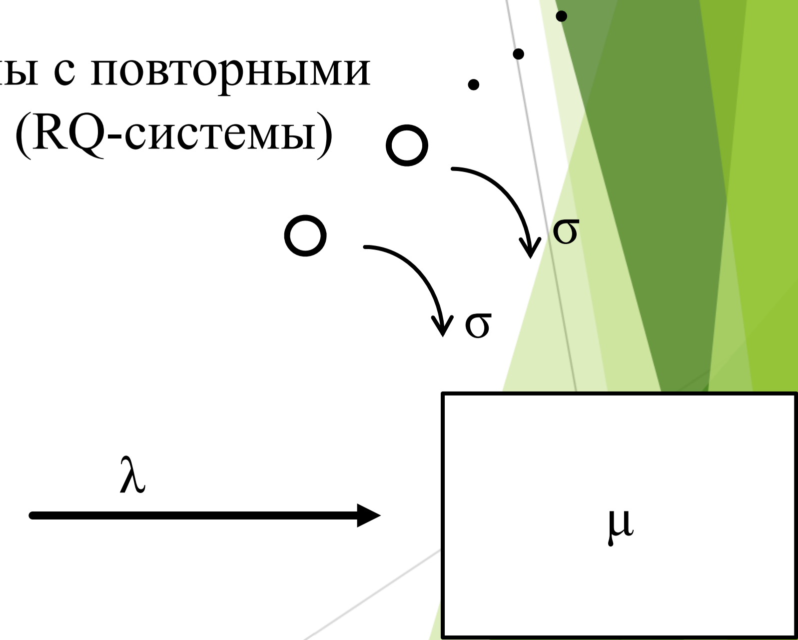
1. Системы с ожиданием




2. Многолинейные системы м системы с неограниченным числом приборов



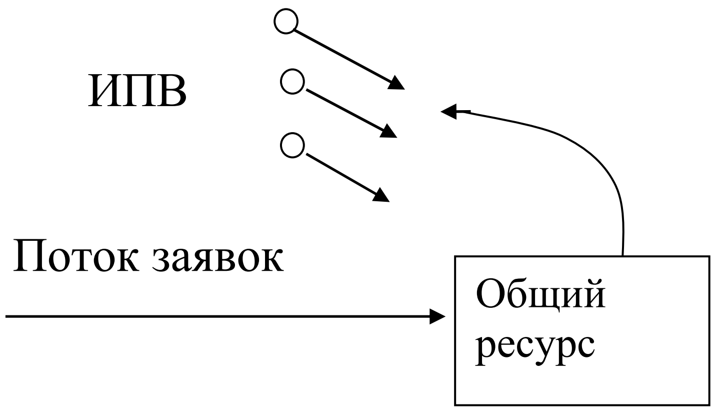

3. Системы с повторными вызовами (RQ-системы)



В сетях случайного доступа обязательным условием является наличие общего ресурса, совместно используемого всеми абонентскими станциями (АС) на правах конкуренции за захват общего ресурса.

Абонентская станция, сформировав сообщение, отправляет его в общий ресурс сети. Копия отправленного сообщения сохраняется на станции. Если ресурс свободен, там происходит обработка отправленного сообщения. Если ресурс занят другим сообщением, то оба сообщения искажаются (говорят, что попадают в конфликт), о чём станции получают извещение, получив которое, каждая станция после случайной задержки повторяет попытку успешного захвата общего ресурса, используя неискажённые копии сообщений. Далее процедура повторяется. В случае успешной обработки (передачи) сообщения в общем ресурсе сети считается, что сеанс связи реализован успешно, и на этом он заканчивается.

Математическую модель сети связи случайного доступа определим в виде RQ систем (Retrial Queueing system). То есть однолинейной системы массового обслуживания с источником повторных вызовов (орбиты), на вход которой поступает поток заявок из внешнего источника.




1. Falin G.I., Tempeton J.G.C. Retrial Queues. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.

2. Artalejo J.R., Gomez-Coral A. Retrial queueing systems: A computational approach. – Springer. Berlin. – 2008.

В современных инфокоммуникационных системах реализованы различные модификации протоколов случайного множественного доступа при наличии технических, алгоритмических или программных средств, наиболее существенными из которых являются:

1. Сигнал оповещения о конфликте (сигнал заглушки). При наложении сообщений в общем ресурсе и их искажении, рассылается сигнал оповещения всех абонентских станций (АС) о сложившийся ситуации с целью предотвращения дополнительных конфликтов.

2. Резервирование общего ресурса. Для уменьшения вероятности возникновения конфликта, абонентская станция, сформировав сообщение, посылает сигнал-запрос на резервирование общего ресурса. При резервировании возможны конфликты с другими запросами на резервирование. Если резервирование выполнено успешно и все АС оповещены о предстоящей передаче сообщения, то реализация данного сообщения происходит без конфликтов.

## Протоколы случайного доступа

1. Если параметр задержки в ИПВ $\sigma$ является величиной постоянной, не зависящей от состояния системы, то протокол будем называть **статическим.**

2. Если параметр $\sigma$ имеет вид $\sigma = \gamma / i$, где $i$ – число заявок в ИПВ, то протокол будем называть **динамическим.** В этом случае распределение вероятностей времени задержки заявки в ИПВ не будет экспоненциальным, так как остаточное время задержки меняется с изменением состояния системы, но выходящий из ИПВ поток заявок принадлежит классу марковизируемых.

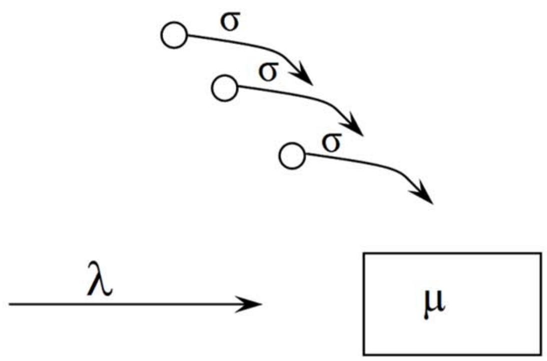
3. Если параметр $\sigma$ имеет вид $\sigma = \gamma / T$, где $T$ – текущее состояние адаптера, то протокол будем называть **адаптивным.**

$$T(t+\Delta t) = \begin{cases} T(t) - \alpha \Delta t, \text{ если } k(t) = 0, \\ T(t) + \beta \Delta t, \text{ если } k(t) = 1, \end{cases} \qquad k(t) = \begin{cases} 0, \text{ если прибор свободен}, \\ 1, \text{ если прибор занят}; \end{cases}$$

# Методы исследования моделей массового обслуживания

- Аналитические методы.
- Асимптотические методы.
- Численные методы.
- Методы имитационного моделирования.
- Эвристические методы.

# RQ-система с конфликтами заявок




$i(t)$ – число заявок на орбите $t$;

$l(t)$ – состояние прибора

$$l(t)=\begin{cases}0, \textit{ если прибор свободен},\\ 1, \textit{ если прибор занят}.\end{cases}$$

$$F(z)=\sum_i z^i P(i)=Mz^i == \frac{\mu-\lambda(z-1)}{\mu}\cdot\left(\frac{2\lambda z-\mu}{2\lambda-\mu}\right)^{\frac{2(\lambda+\sigma)+\mu}{4\sigma}} \exp\left\{-\frac{\lambda(z-1)}{2\sigma}\right\}$$

# Асимптотические методы теории массового обслуживания

по своей научной значимости аналогичны предельным теоремам теории вероятностей:

1. Закон больших чисел.
2. Центральная предельная теорема.
3. Усиленный закон больших чисел.
4. Центральная предельная проблема.

На вопросы точности аппроксимаций, полученных асимптотическими методами, и области их применимости следует обращать самое серьезное внимание и не ограничиваться графиками допредельных и предельных распределений.

# Три класса асимптотических методов

1. Методы предельного перехода в аналитических формулах, полученных аналитическими методами. Этот подход имеет ограниченное применение в связи с его трудной реализуемостью из-за отсутствия таких аналитических результатов.
2. Методы предельного перехода в последовательностях случайных процессов, определяющих изменения во времени состояний рассматриваемых СМО (А.А. Боровков «Асимптотические методы в теории массового обслуживания» - Москва. Наука. 1980. – 384 с).
3. Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания (в теории потоков) будем называть <u>исследование уравнений</u>, определяющих какие-либо характеристики системы (потока) при выполнении некоторого <u>предельного условия</u>, вид которого будет конкретизирован для различных моделей и поставленных задач исследования.

# Ключевыми моментами являются

1. Составление уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы (распределение вероятностей, производящие или характеристические функции).

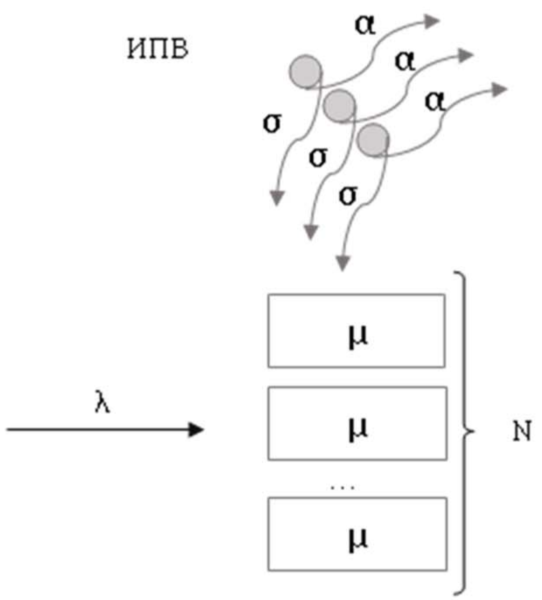
2. Формулирование предельного условия.

3. Возможность выполнить исследование (решить) предельные уравнения.

4. Переход от непрерывного предельного распределения к дискретному.

5. Точность аппроксимации и область применимости асимптотических распределений для аппроксимации допредельных распределений.

# RQ-система M|M|N с нетерпеливыми заявками




Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ,

а $k(t)$ – состояние прибора:

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{ если прибор свободен} \\ 1, \text{ если прибор занят,} \\ \dots \\ n, \text{ если все приборы зан} \end{cases}$$

$$P\{k(t)=k,\ i(t)=i\} = P(k, i, t)$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = \mu P_1(0,t) - \lambda P_0(0,t) + \alpha P_0(1,t), \\ k = 1; n-1. \\ \dfrac{\partial P_k(0,t)}{\partial t} = -(k\mu + \lambda) P_k(0,t) + \lambda P_{k-1}(0,t) + \sigma P_{k-1}(1,t) + \alpha P_k(1,t) + \\ + (k+1)\mu P_{k+1}(0,t), \\ \dfrac{\partial P_n(0,t)}{\partial t} = -(n\mu + \lambda) P_n(0,t) + \lambda P_{n-1}(0,t) + \sigma P_{n-1}(1,t) + \alpha P_n(1,t) \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений для частичных характеристических функций $H_k(u) = \sum_i e^{jui} P_k(i)$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица:

$$
\begin{cases}
0 = j(\sigma + \alpha(1 - e^{-ju}))H_0'(u) + \mu H_1(u) - \lambda H_0(u), \\
k = 1; n-1. \\
0 = j(\sigma + \alpha(1 - e^{-ju}))H_k'(u) - \lambda H_k(u) - k\mu H_k(u) + \lambda H_{k-1}(u) - \\
- j\sigma e^{-ju} H_{k-1}'(u) + (k+1)\mu H_{k+1}(u), \\
0 = j\alpha(1 - e^{-ju})\sum_{k=0}^{n} H_k'(u) - \lambda(1 - e^{ju})H_n(u) + j\sigma(1 - e^{-ju})\sum_{k=0}^{n-1} H_k'(u)
\end{cases}
$$

Предлагаемый метод асимптотического анализа реализуется в построении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в котором асимптотика первого порядка, аналогично закону больших чисел, определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов. Асимптотика второго порядка, аналогично центральной предельной теореме, позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок в системе.

## Асимптотический анализ первого порядка

Решим полученную систему методом асимптотического анализа в условии долгой терпеливости (long time of patience) высокой загрузки системы, то есть при $\alpha \to 0$.

Введем обозначения: $\alpha=\varepsilon$, $u=\varepsilon w$, $H_0(u)=\varepsilon^n F_0(w,\varepsilon)$, $H_1(u)=\varepsilon^{n-1}F_1(w,\varepsilon)$, $H_k(u)=\varepsilon^{n-k}F_k(w,\varepsilon)$ ,…, $H_{n-1}(u)=\varepsilon F_{n-1}(w,\varepsilon)$ , $H_n(u)=F_n(w,\varepsilon)$ ,где $\varepsilon\downarrow 0$ – бесконечно малая величина.

$$\begin{cases}
0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))F_0'(w,\varepsilon)+\mu F_1(w,\varepsilon)-\lambda\varepsilon F_0(w,\varepsilon),\\
k=1;n-1.\\
0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))F_k'(w,\varepsilon)-(\lambda+k\mu)\varepsilon F_k(w,\varepsilon)+\\
+\lambda\varepsilon F_{k-1}(w,\varepsilon)-j\sigma e^{-j\varepsilon w}\varepsilon F_{k-1}'(w,\varepsilon)+(k+1)\mu F_{k+1}(w,\varepsilon),\\
0=j\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^{\mathrm{n}-k}F_k'(w,\varepsilon)+\lambda e^{j\varepsilon w}F_n(w,\varepsilon)+j\sigma\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{\mathrm{n}-k-1}F_k'(w,\varepsilon)
\end{cases}$$

Так как допредельная характеристическая функция приближенно равна:

$$h(u)=\sum_{k=0}^{n}H_k(u)=F_n\left(w,\varepsilon\right)+o(\varepsilon)=F_n\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)+o(\varepsilon)\approx F_n\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

Асимптотическое приближение характеристической функции первого порядка

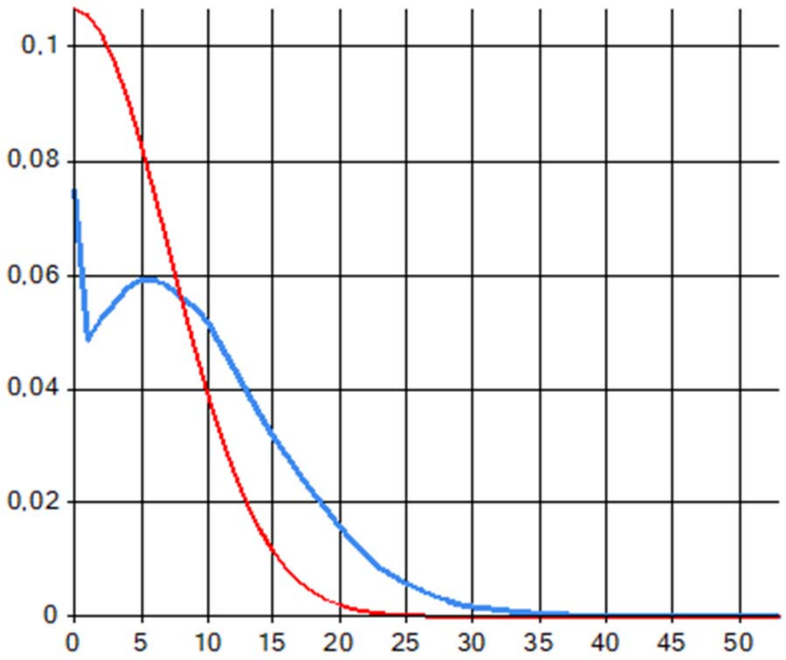
$$h^{(1)}(u)=\exp\left\{ju\frac{\lambda-n\mu}{\alpha}\right\},$$

Асимптотическое приближение характеристической функции второго порядка

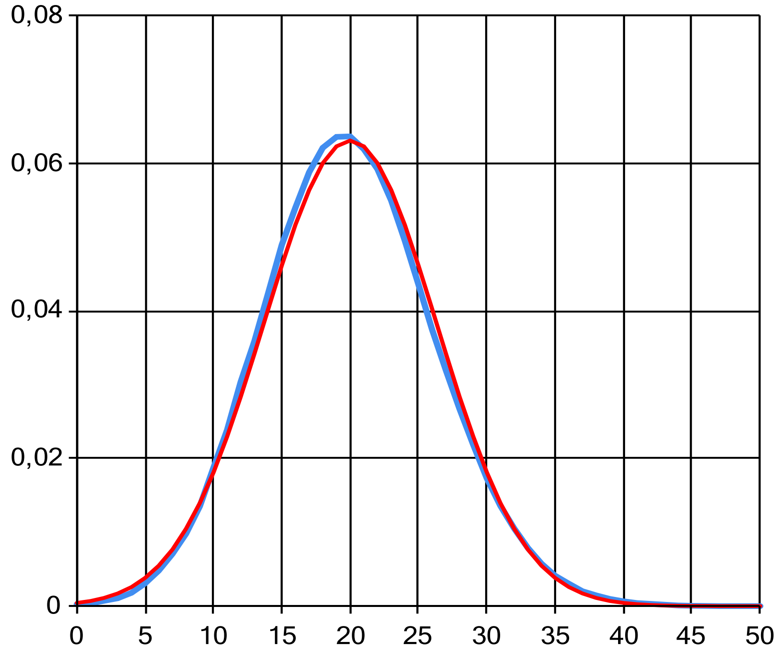
$$h^{(2)}(u)=\exp\left\{ju\frac{\lambda-N\mu}{\alpha}+ju^2\frac{\lambda}{2\alpha^2}\right\}\#$$

# Численный анализ RQ-системы вида M|M|N

Распределение вероятностей асимптотической и эмпирической функции распределения




$N = 5, \lambda = 5, \alpha = 0.1$




$N = 2, \lambda = 4, \alpha = 0.1$

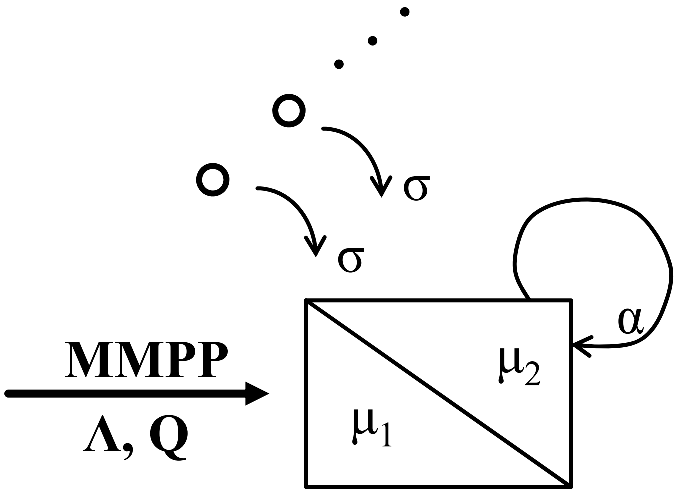
Таблица 1 – Значения расстояний Колмогорова между эмпирическим и асимптотическим распределениями вероятностей при $N = 2, \mu = 1$

| **α** | **2** | **1** | **0,5** | **0,1** |
|---|---|---|---|---|
| *λ=2* | 0,204 | 0,214 | 0,199 | 0,126 |
| *λ=4* | 0,146 | 0,088 | 0,035 | 0,013 |
| *λ=10* | 0,041 | 0,015 | 0,011 | 0,008 |
| *λ=20* | 0,018 | 0,017 | 0,014 | 0,007 |

Таблица 2 – Значения расстояний Колмогорова между эмпирическим и асимптотическим распределениями вероятностей при $N = 5, \mu = 1$

| **α** | **2** | **1** | **0,5** | **0,1** |
|---|---|---|---|---|
| *λ=5* | 0,095 | 0,156 | 0,180 | 0,262 |
| *λ=10* | 0,038 | 0,043 | 0,039 | 0,015 |
| *λ=25* | 0,016 | 0,010 | 0,007 | 0,006 |
| *λ=50* | 0,012 | 0,007 | 0,009 | 0,005 |

# RQ-система MMPP/M/1 с вызываемыми заявкам




**Предельные условия:**

1. Условие продолжительного обслуживания вызываемых заявок, когда $\mu_2 \to 0$.

2. Условие большой задержки заявок на орбите, когда $\sigma \to 0$.

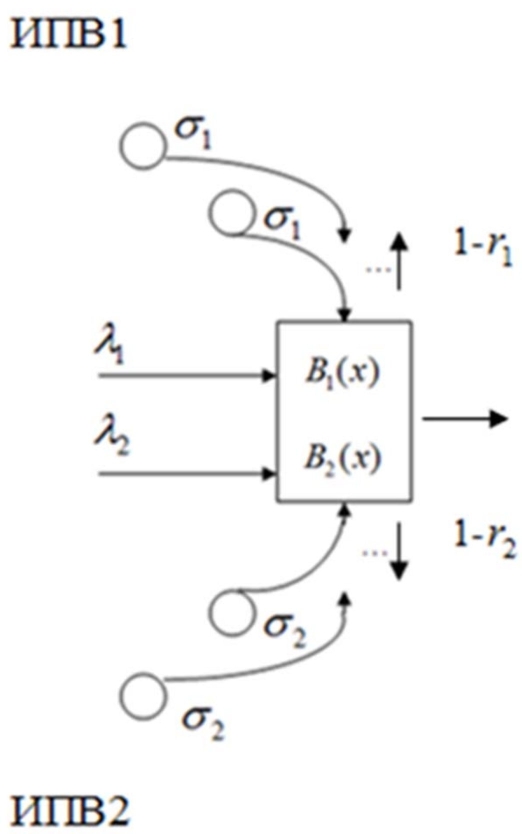
3. Условие интенсивного вызывания, когда $\alpha \to \infty$.

4. Условие большой загрузки, когда параметр $\rho \to 1$, где $0 < \rho < 1$, определяет диагональную матрицу $\boldsymbol{\lambda}$ равенством

$$\boldsymbol{\lambda} = \rho \cdot \frac{\mu_1}{\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\lambda}_1$$

5. Условие предельно редких изменений состояний входящего MMPP-потока, когда ε -> 0, а ε – малый параметр, определяющий матрицу **Q** равенством $\mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{Q}_1$, где $\mathbf{Q}_1$ – генератор произвольной цепи Маркова $n(t)$, управляющий входящим MMPP-потоком.

## RQ-СИСТЕМА $M^{(2)}|B(x)^{(2)}|1$ С R-НАСТОЙЧИВЫМ ВЫТЕСНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЗАЯВОК (r-persistent exclusion)




Если в момент прихода заявка i-го типа обнаруживает прибор занятым заявкой второго типа, то пришедшая заявка с вероятностью   вытесняет заявку второго типа, а сама встает на обслуживание, иначе с вероятностью уходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку.

ITMM conference

Российский университет дружбы народов

XVII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова
**«ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»(ИТММ – 2018)**

Более 300 участников: Россия, Алжир, Австрия, Азербайджан, Англия, Беларусь, Болгария, Венгрия, Германия, Индия, Италия, Казахстан, Китай, Корея, Нидерланды, Польша, США, Украина, Узбекистан

Время проведения: 10.09.2018–15.09.2018.
**International *Workshop on Retrial Queues and Related Topics* WRQ-2018**

**Conference Web-site**: http://itmmconf.ru/

# Спасибо за внимание

Moiseeva Svetlana

smoiseeva@mail.ru